
3 3433 06641264 8

OFZ

Frolow

OFZ

Frolow

LES

CARRÉS MAGIQUES.

NOUVELLE ÉTUDE

PAR M. FROLOW,
INGÉNIEUR.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1886

LES

CARRÉS MAGIQUES.

11090. PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES AUGUSTINS, 55.

(J.C.)

C

LES

ARRÉS MAGIQUES.

NOUVELLE ÉTUDE

PAR M. FROLOW,

INGÉNIEUR.



PARIS,

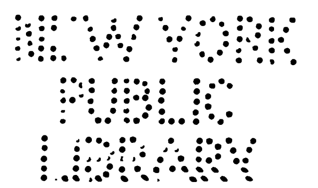
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

U BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

—

1886




ASTOR LIBRARY
JUN
20
1892
NEW YORK

AVANT-PROPOS.

Cet Appendice est destiné à exposer quelques nouvelles recherches sur les carrés magiques, ce problème si intéressant de la science des nombres, et à relever quelques erreurs qui se sont glissées dans notre Livre intitulé : *Le problème d'Euler et les carrés magiques*, et qui nous ont été signalées par M. Édouard Lucas, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis et auteur de l'excellent Ouvrage *Récréations mathématiques*, et par M. V. Coccoz, commandant d'artillerie en retraite. Nous croyons devoir remercier aussi, de leur aimable concours, M. Delannoy, ancien élève de l'École Polytechnique, et M. Feisthamel, rédacteur de la partie récréative du *Siècle*. Le Rév. A.-H. Frost, de Cambridge, nous a fait part de ses recherches : elles nous ont appris qu'il a donné d'excellentes méthodes pour la construction des carrés diaboliques, qu'il a nommés *carrés de Nasik*, du nom de la localité des Indes où il les a construits il y a plus de vingt ans. Quant au problème du cavalier, il nous a envoyé, entre autres, deux solutions fort intéressantes sur un échiquier carré de 100 cases, avec les sauts du cavalier modifiés, de sorte que, au lieu de faire 1 pas suivant la direction d'un côté et 2 pas suivant la direction perpendiculaire, ce que nous représenterons par le symbole (1, 2), le saut, dans une de ces solutions, est (1, 4) et dans l'autre (2,3). Nous prions M. Frost de nous excuser de ce que

nous nous soyons permis de joindre à ce Mémoire ses belles solutions en les exprimant en chiffres (*Pl. VII*). Il est bien entendu que les modifications de ce genre ne changent pas la nature du saut du cavalier, pourvu que les deux nombres soient différents, et que le problème peut toujours être traité par la méthode générale d'Euler et par toutes celles qui en dérivent, comme la méthode graphique que nous avons exposée ; cette méthode est également applicable dans le cas où l'échiquier est tracé sur la surface d'un parallélépipède, d'un cylindre et même d'une sphère ([1]).

Dans tout ce qui va suivre, sur les carrés magiques, nous avons tâché de n'employer que des méthodes qui nous paraissaient neuves, en évitant d'appliquer celles qui ont été employées par d'autres auteurs. C'est ainsi que nous n'avons pas formé un seul carré magique au moyen de la méthode de deux carrés composants. Nous pensons que dans les questions de ce genre, ainsi que dans toutes les recherches mathématiques, les méthodes sont encore plus intéressantes que le résultat lui-même et que leur multiplicité sert à mieux éclairer l'objet des recherches.

M. FROLOW,
Ingénieur.

([1]) Le problème d'Euler, dans le cas où l'échiquier est tracé sur un tore par des méridiens et des parallèles, nous a été proposé dernièrement par le colonel du génie Dewulf, très connu par ses excellents travaux sur la Géométrie supérieure et la Géométrie cinématique.

LES

CARRÉS MAGIQUES.

CHAPITRE I.

LES CARRÉS MAGIQUES DE 4 ([1]).

De tous les carrés magiques, les plus intéressants sont ceux qui ont pour racine le nombre 4; car, n'étant pas très nombreux, ils présentent beaucoup de propriétés remarquables. C'est à Frénicle que revient l'honneur d'avoir montré qu'il existe 880 carrés de 4 différents; il les a donnés tous, mais on ne connaît pas la raison de l'ordre de la classification qu'il a adoptée. Cependant nous devons dire que M. Delannoy a observé que les carrés de Frénicle sont disposés dans un ordre tel que les deux premiers nombres de la première diagonale vont toujours en croissant dans les carrés successifs, et que les deux autres nombres placés sur cette diagonale sont pris alternativement à droite et à gauche du nombre égal à la moitié du complément à 34 des deux premiers, en commençant par ceux qui se rapprochent le plus de ce nombre. Comme il est dit à la page 31 de notre Livre, nous avons préféré, pour l'étude des carrés magiques, la méthode des coordonnées cartésiennes qui permet de disposer immédiatement dans un carré les nombres eux-mêmes et non leurs parties. A cette méthode, pour l'étude des carrés de 4, de 5 et de 6, nous en avons joint une que nous appellerons la *méthode de la notation à deux indices,* qui consiste à partager la progression des nombres naturels 1, 2, 3, ..., n^2, en n sections de n nombres chacune et à représenter chaque nombre par le numéro de la section où il se trouve et par le numéro de la place qu'il occupe dans cette section. Par exemple, pour $n = 4$, le nombre 10 appartient à

([1]) Ce Chapitre est destiné à remplacer les articles XI et XII, p. 38-41, de notre livre : *Le problème d'Euler et les carrés magiques.* Grand in-8; 1884. (Paris, Gauthier-Villars.)

la troisième section, dans laquelle il occupe la deuxième place, et nous le représenterons par le symbole $10 = 3^2$; de même la somme de 4 nombres 2, 9, 10 et 13 sera représentée par le symbole $1^2 3^1 3^2 4^1 = 11^6$. Enfin, pour compléter les recherches des carrés de 4, nous avons cru utile d'étudier les 86 combinaisons de 4 nombres donnant la somme égale à 34. Ces trois méthodes combinées nous ont permis non seulement de trouver les 880 carrés de 4, indépendamment des Tables de Frénicle, que nous n'avions pas à notre disposition, mais encore de les classer dans un ordre méthodique et commode pour leur vérification.

Faisons d'abord voir les propriétés particulières des carrés de 4 qui nous paraissent les plus remarquables.

En divisant les 16 cases d'un carré en 4 sections de 4 cases, que nous indiquerons par des lettres a, b, c, d avec des indices (1), (2), (3) et (4), et que nous nommerons *quadrilles*, on peut prouver que dans tout carré de 4 les 4 nombres de chaque quadrille donnent la somme égale à 34 (diagramme n° 1), c'est-à-dire que

$$\Sigma a = \Sigma b = \Sigma c = \Sigma d = 34.$$

Diagr. 1.

a_1	c_1	c_2	a_2
d_3	b_3	b_4	d_4
d_2	b_2	b_1	d_1
a_4	c_4	c_3	a_3

En effet, en additionnant d'abord deux rangées horizontales extérieures et, après, deux rangées verticales intérieures, nous aurons

$$\Sigma a + \Sigma c = 2 \times 34,$$
$$\Sigma b + \Sigma c = 2 \times 34,$$

ce qui donne

$$\Sigma a = \Sigma b.$$

En faisant la somme des deux grandes diagonales, on a

$$\Sigma a + \Sigma b = 2 \times 34.$$

donc

$$\Sigma a = \Sigma b = 34.$$

En introduisant ces valeurs dans les deux premières égalités, on aura

$$\Sigma c = 34.$$

Enfin, en faisant la somme de deux rangées verticales extérieures, on aura

$$\Sigma a + \Sigma d = 2 \times 34,$$

d'où l'on tire

$$\Sigma d = 34.$$

On déduit des 10 égalités fondamentales des carrés magiques de 4 les égalités suivantes, qu'il est utile de connaître :

(1) $a_1 + a_4 = d_1 + d_4$; (2) $a_2 + a_3 = d_2 + d_3$;
(3) $b_1 + b_4 = c_1 + c_4$; (4) $b_2 + b_3 = c_2 + c_3$;
(5) $c_3 + c_4 = a_1 + a_2$; (6) $c_1 + c_2 = a_3 + a_4$;
(7) $d_3 + d_4 = b_1 + b_2$; (8) $d_1 + d_2 = b_3 + b_4$;
(9) $a_1 + a_3 = b_2 + b_4$; (10) $a_2 + a_4 = b_1 + b_3$.

En faisant la somme des égalités (1), (4), (6) et (7), nous obtenons

$$a_1 + b_3 + c_1 + d_3 = a_3 + b_1 + c_3 + d_1,$$

et, en faisant la somme des égalités (2), (3), (6) et (7),

$$a_2 + b_4 + c_2 + d_4 = a_4 + b_2 + c_4 + d_2.$$

Ces égalités expriment que les sommes de 4 nombres dans deux quartiers opposés sont égales entre elles. Il est facile de faire voir que ces sommes ne peuvent être plus petites que 22 et plus grandes que 46.

Cette égalité des quartiers opposés existe dans tous les carrés pour n pair; car, en désignant les 4 quartiers par des lettres A, B, C, D (diagramme n° 2), on a A + B = B + C, d'où l'on tire A = C; et

Diagr. 2.

A	*B*
D	*C*

A + D = A + B, d'où l'on tire B = D.

Dans les carrés semi-diaboliques et diaboliques de 4, tous les quar-

tiers donnent des sommes égales à 34. En effet, en additionnant deux égalités fondamentales de ces carrés,

$$a_1 + b_3 + b_1 + a_3 = 34 \quad \text{et} \quad c_1 + d_3 + c_3 + d_1 = 34,$$

on aura

$$(a_1 + c_1 + b_3 + d_3) + (b_1 + c_3 + a_3 + d_1) = 2 \times 34;$$

mais, comme les deux termes de cette égalité sont égaux, on aura

$$a_1 + c_1 + b_3 + d_3 = b_1 + c_3 + a_3 + d_1 = 34.$$

Toutes les rangées horizontales et verticales sont toujours composées de 2 nombres pairs et de 2 nombres impairs, quand tous les nombres appartiennent à une progression continue.

C'est facile à prouver, car la somme des nombres pairs 2, 4, 6, ..., 16 est égale à 72, tandis que la somme des nombres impairs est égale à 64. Il est évident qu'on ne peut pas former deux rangées de 4 nombres pairs et deux autres rangées de 4 nombres impairs. Supposons qu'on forme une rangée de 4 nombres pairs et une autre de 4 nombres impairs, comme c'est indiqué par les croix et les ronds (diagramme n° **3**).

Diagr. 3.

o	o	o	o	*I*
+	o	o	+	*II*
o	+	+	o	*III*
+	+	+	+	*IV*

Si les croix représentent les nombres impairs, la somme de la IVe rangée horizontale étant égale à 34, la somme des 4 croix de la IIe et de la IIIe rangée sera égale à $64 - 34 = 30$. Nous avons vu plus haut qu'il existe la relation $d_3 + d_4 = b_2 + b_1$; la moitié de 30 étant 15, la somme des nombres dans la IIe rangée, ainsi que dans la IIIe, serait impaire, ce qui prouve que cette disposition est défectueuse. On peut de même faire voir que, dans tout carré de 4, les quadrilles sont aussi composés de 2 nombres pairs et de 2 nombres impairs, et que cela existe encore dans les quartiers de tous les carrés de 4 semi-diaboliques et diaboliques. Enfin on prouve facilement que, si l'une des grandes diagonales est formée de 4 nombres pairs, l'autre diagonale doit avoir 4 nombres impairs.

Outre les quadrilles et les quartiers, on peut grouper les nombres de certains carrés de 4, encore de trois manières, indiquées sur les

diagrammes 4, 5 et 6 par 4 signes conventionnels. Le groupement du

Diagr. 4.

×	o	×	o
—	+	—	+
×	o	×	o
—	+	—	+

Diagr. 5.

×	×	+	+
—	—	o	o
—	—	o	o
×	×	+	+

Diagr. 6.

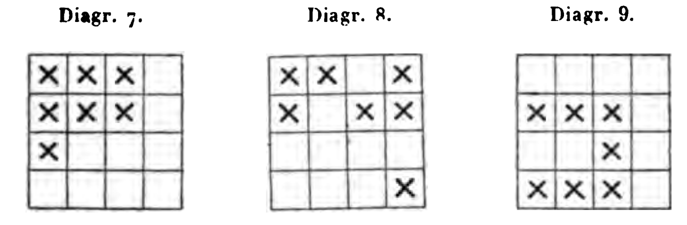
o	×	×	o
o	×	×	o
+	—	—	+
+	—	—	+

diagramme n° 4 se déduit du groupement en quartiers par la permutation de 4 rangées correspondantes. Donc, dans tous les carrés à quartiers égaux, c'est-à-dire diaboliques et semi-diaboliques, on a encore 4 groupes de 4 nombres dont la somme est égale à 34. Outre cela on a dans tous les carrés diaboliques les groupements par 4 cases formant deux carrés médians, indiqués sur les diagrammes n°s 5 et 6, que l'on ne rencontre que séparément dans les autres carrés, avant ou après la permutation des rangées correspondantes, excepté les 96 carrés semi-diaboliques avec des couples complémentaires disposés en diagonale ou en biais qui, naturellement, ne peuvent pas avoir ces derniers groupements.

C'est sur la considération des quadrilles, quartiers et carrés médians que Frenicle s'est basé pour partager tous les carrés de 4 en 5 classes, dont les quatres premières ont les marques α, β, γ, δ et la dernière n'a pas de marque.

Pour qu'un carré de 4 soit complètement déterminé, il suffit d'écrire 7 des 16 nombres qui le composent, en choisissant les cases d'une manière convenable permettant de trouver la place des 9 nombres qui ne sont pas écrits, au moyen des égalités exprimant les conditions du problème, comme, par exemple, c'est indiqué sur les diagrammes n°s 7, 8 et 9. Au contraire, si les cases sont mal choisies,

Diagr. 7. Diagr. 8. Diagr. 9.



on peut placer jusqu'à 12 nombres, sans que le carré soit déterminé,

comme c'est indiqué sur le diagramme n° 10. En effet, prenons les

Diagr. 10.

×	×	×	×
	×	×	
	×	×	
×	×	×	×

12 nombres écrits sur le diagramme n° 11 ; on voit que les places des

Diagr. 11.

1	4	13	16
	14	3	
	5	12	
10	11	6	7

4 nombres qui restent, 2, 8, 9 et 15, ne sont pas exactement déterminées, car on peut, indistinctement, mettre sur la case, située au-dessous du chiffre 1, l'un des nombres, 8 ou 15.

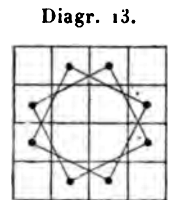
Cela montre clairement que ce problème (ainsi que celui du cavalier des échecs) n'appartient nullement à la théorie des équations, qui ne s'occupe que de la grandeur des quantités, mais non pas de l'ordre de leur disposition relative, et que les égalités qui expriment les conditions des carrés magiques ne sont aucunement des équations algébriques, parce qu'il s'agit ici non pas de trouver des nombres inconnus, mais de savoir disposer des nombres donnés d'avance sur des cases d'une figure donnée aussi. Ces deux problèmes appartiennent entièrement à la science des nombres. A ce qu'il paraît, c'est l'opinion de Legendre, qui s'est occupé de ces problèmes et de quelques problèmes analogues sans sa *Théorie des nombres,* et même de Fermat qui a dit qu'il ne connaissait *rien de plus beau en l'Arithmétique* que les carrés magiques. Or la théorie des nombres n'est que l'arithmétique supérieure.

Passons aux transformations particulières des carrés de 4 : si l'on a égale à s la somme des 4 nombres pris dans 4 cases différentes, dans 4 rangées horizontales ou verticales, disposées en losange ou en carrés (diagrammes n°s 12 et 13), de sorte qu'il y ait deux nombres dans deux quadrilles a et b, ou c et d (diagramme n° 1), on peut faire permuter les rangées et les disposer dans l'ordre I, III, II, IV ou

III, I, IV, II, tel que les quatre nombres forment une diagonale. Il

Diagr. 12.

Diagr. 13.



est évident que dans ce cas l'autre diagonale donnera aussi la somme égale à s, car toutes les deux sont égales ensemble à

$$\Sigma a + \Sigma b = \Sigma c + \Sigma d = 2s.$$

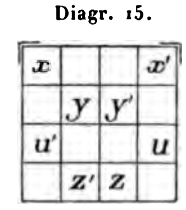
Dans tous les carrés qui ont sur les diagonales deux petits nombres de 1 à 8 et deux grands de 9 à 16, on peut diminuer de 8 tous les grands nombres et augmenter de la même quantité tous les petits nombres, ce qui revient à intervertir les deux moitiés des séries des coordonnées.

Si l'on a dans un carré $x + y + z + u = 34$ (diagrammes n° **14** et **15**), on peut transporter la rangée xx' de l'autre côté du carré, immé-

Diagr. 14.

x			x'
u'			u
	y'	y	
	z	z'	

Diagr. 15.



diatement ou après avoir fait permuter les 4 rangées correspondantes (page 35 de notre Livre). Cette transformation donne un nouveau carré représenté sur le diagramme n° **16** (sur tous ces diagrammes les

Diagr. 16.

u'			u
	y'	y	
	z	z'	
x			x'

lettres accentuées x', y', ... expriment les compléments des nombres x, y, ...).

II.

15, 16;	1, 3, 14, 16;	1, 5, 12, 16;	1, 8, 9, 16;
13, 15;	2, 6, 11, 15;	2, 7, 10, 15;	
13, 14;	3, 6, 11, 14;	3, 7, 10, 14;	
12, 13;	4, 8, 9, 13;		
11, 12;	5, 7, 10, 12;		
9, 11;			
9, 10.			

16 combinaisons de ce groupe sont aussi composées de deux complémentaires, mais les nombres sont pris dans 2 sections ces, ou dans 4 sections sur 2 places différentes.

III.

1, 4, 14, 15;	1, 6, 12, 15;	1, 7, 12, 14;
1, 8, 10, 15;	1, 8, 11, 14;	1, 8, 12, 13;
2, 3, 13, 16;	2, 5, 11, 16;	2, 7, 9, 16;
2, 7, 11, 14;	2, 7, 12, 13;	2, 8, 11, 13;
3, 5, 10, 16;	3, 6, 9, 16;	3, 6, 10, 15;
3, 6, 12, 13;	3, 8, 10, 13;	
4, 5, 9, 16;	4, 5, 10, 15;	4, 5, 11, 14;
4, 6, 9, 15;	4, 7, 9, 14;	
5, 8, 10, 11;		
6, 7, 9, 12.		

s 24 combinaisons sont composées de 4 nombres pris dans 4 sec- ou dans 2 sections par deux, sur 4 places différentes, ou enfin 4 sections sur 2 places différentes, comme

$$1,\ 8,\ 12,\ 13 = 1^1 2^4 3^4 4^1.$$

IV.

10, 11, 12;	2, 9, 11, 12;	3, 9, 10, 12;	4, 9, 10, 11;
6, 7, 16;	5, 6, 8, 15;	5, 7, 8, 14;	6, 7, 8, 13.

s 8 combinaisons ont un nombre dans une section extérieure et nombres dans une section intérieure.

V.

5, 13, 15*;	1, 6, 13, 14;	1, 9, 10, 14;	1, 9, 11, 13*;
4, 12, 16*;	2, 5, 13, 14;	2, 9, 10, 13;	
4, 11, 16;	3, 4, 12, 15;	3, 7, 8, 16;	3, 8, 11, 12;
6, 8, 16*;	4, 7, 8, 15;	4, 7, 11, 12;	4, 8, 10, 12*;
6, 9, 14;	5, 6, 10, 13;	5, 7, 9, 13*;	

Par ce procédé, nous avons trouvé 18 types de carrés simples qui sont marqués sur nos planches, ainsi que leurs 18 générateurs, d'un trait double aux angles de la rangée transposable. Ajoutons à cela que dans tout carré magique on peut toujours remplacer tous les nombres par leurs compléments; car, si n nombres donnent la somme s, leurs n compléments la donnent aussi.

En représentant les nombres par la méthode de la notation à doubles indices, la somme de 4 nombres de 1 à 16, égale à 34, s'exprimerait par un des trois symboles 10^{10}, 11^{6} et 9^{14}. Les combinaisons 11^{6} et 9^{14} ne peuvent occuper que les diagonales des carrés simples, toujours conjointement, de sorte que la somme des deux diagonales $11^{6}+9^{14}$ est égale à 20^{20}. Cette méthode est applicable aux carrés de toute grandeur; dans les carrés de 4 qui ont aux diagonales 10^{10}, on peut retourner les indices, par exemple remplacer $1^{2}=2$ par $2^{1}=5$; $3^{4}=12$ par $4^{3}=15$, ...; alors les nombres changeront de place, excepté les quatre nombres aux indices égaux : $1^{1}=1$; $2^{2}=6$; $3^{3}=11$ et $4^{4}=16$. Par ce procédé on déduit du diagramme n° 17 le diagramme n° 18.

Diagr. 17.

2^2	3^1	4^3	1^4
1^1	3^4	4^2	2^3
4^4	2^1	1^3	3^2
3^3	2^4	1^2	4^1

Diagr. 18.

2^2	1^3	3^4	4^1
1^1	4^3	2^4	3^2
4^4	1^2	3^1	2^3
3^3	4^2	2^1	1^4

En combinant les 16 nombres 4 à 4, on ne peut avoir que 86 combinaisons donnant la somme 34; nous les partagerons en six groupes :

I.

1, 4, 13, 16;
2, 3, 14, 15;
3, 5, 12, 14;
4, 6, 11, 13;
5, 8, 9, 12;
6, 7, 10, 11.

1, 6, 11, 16;
2, 5, 12, 15;
3, 8, 9, 14;
4, 7, 10, 13;

1, 7, 10, 16;
2, 8, 9, 15;

Les 12 combinaisons de ce groupe sont formées en prenant deux couples de nombres complémentaires dans 4 sections sur 4 places différentes ou dans 2 sections sur 2 places différentes; par exemple, on a

$$1, 6, 11, 16 = 1^{1}2^{2}3^{3}4^{4} \quad \text{et} \quad 1, 4, 13, 16 = 1^{1}1^{4}4^{1}4^{4}.$$

II.

1, 2, 15, 16;	1, 3, 14, 16;	1, 5, 12, 16;	1, 8, 9, 16;
2, 4, 13, 15;	2, 6, 11, 15:	2, 7, 10, 15;	
3, 4, 13, 14;	3, 6, 11, 14;	3, 7, 10, 14;	
4, 5, 12, 13;	4, 8, 9, 13;		
5, 6, 11, 12;	5, 7, 10, 12;		
6, 8, 9, 11;			
7, 8, 9, 10.			

Les 16 combinaisons de ce groupe sont aussi composées de deux couples complémentaires, mais les nombres sont pris dans 2 sections sur 4 places, ou dans 4 sections sur 2 places différentes.

III.

1, 4, 14, 15;	1, 6, 12, 15;	1, 7, 12, 14;
1, 8, 10, 15;	1, 8, 11, 14;	1, 8, 12, 13;
2, 3, 13, 16;	2, 5, 11, 16;	2, 7, 9, 16;
2, 7, 11, 14;	2, 7, 12, 13;	2, 8, 11, 13;
3, 5, 10, 16;	3, 6, 9, 16;	3, 6, 10, 15;
3, 6, 12, 13;	3, 8, 10, 13;	
4, 5, 9, 16;	4, 5, 10, 15;	4, 5, 11, 14;
4, 6, 9, 15;	4, 7, 9, 14;	
5, 8, 10, 11;		
6, 7, 9, 12.		

Ces 24 combinaisons sont composées de 4 nombres pris dans 4 sections ou dans 2 sections par deux, sur 4 places différentes, ou enfin dans 4 sections sur 2 places différentes, comme

$$1,\ 8,\ 12,\ 13 = 1^1 2^4 3^4 4^1.$$

IV.

1, 10, 11, 12;	2, 9, 11, 12;	3, 9, 10, 12;	4, 9, 10, 11;
5, 6, 7, 16;	5, 6, 8, 15;	5, 7, 8, 14;	6, 7, 8, 13.

Ces 8 combinaisons ont un nombre dans une section extérieure et trois nombres dans une section intérieure.

V.

1, 5, 13, 15*;	1, 6, 13, 14;	1, 9, 10, 14;	1, 9, 11, 13*;
2, 4, 12, 16*;	2, 5, 13, 14;	2, 9, 10, 13;	
3, 4, 11, 16;	3, 4, 12, 15;	3, 7, 8, 16;	3, 8, 11, 12;
4, 6, 8, 16*;	4, 7, 8, 15;	4, 7, 11, 12;	4, 8, 10, 12*;
5, 6, 9, 14;	5, 6, 10, 13;	5, 7, 9, 13*;	

Les 18 combinaisons de ce groupe se composent de 4 nombres dont deux sont pris dans une section et les deux autres dans deux autres sections. Parmi ces combinaisons il y en a 6 marquées d'astérisque qui sont composées de 4 nombres pairs ou de 4 nombres impairs, comme celles du dernier groupe.

VI.

1, 7, 11, 15;	2, 6, 10, 16;	2, 6, 12, 14;	2, 8, 10, 14;
3, 5, 11, 15;	3, 7, 9, 15;	3, 7, 11, 13;	4, 6, 10, 14.

De toutes ces 86 combinaisons, les plus importantes sont les 36 des groupes I et III, qui forment exclusivement les 16 égalités fondamentales et les 20 égalités des quadrilles, des quartiers et des carrés et rectangles intérieurs (diagrammes n°s 4, 5 et 6) des carrés diaboliques. Les 12 combinaisons du groupe I y occupent les diagonales et les angles des carrés de 9 cases. Les combinaisons du groupe II ne peuvent occuper que 4 ou 2 rangées parallèles aux côtés dans les carrés simples. Toutes les autres combinaisons ne peuvent occuper que les diagonales des carrés simples.

Les Planches I à VI représentent 157 types de carrés magiques de 4 partagés en trois classes, à la tête de chacune desquelles se trouve un carré diabolique. On aurait pu encore diminuer le nombre des types, au moyen de transformations simples, mais cela aurait exigé de longues explications. Si l'on prend pour générateur le type des carrés diaboliques I, on obtient le carré II en transposant la IIe et la IIIe section des séries; le carré III se déduit du carré I en transposant les nombres 2 et 5, 4 et 7 et leurs compléments. Ainsi l'on aurait pu ramener à un seul type les 3 types des carrés diaboliques et les 42 types des carrés semi-diaboliques donnés sur nos Planches; mais cela aurait embrouillé la classification.

Chacun des 3 types de carrés diaboliques produit par la rupture $4 \times 4 = 16$ carrés diaboliques et ces derniers produisent, par la per-

Diagr. 19.

3	6	9	16
10	15	4	5
8	1	14	11
13	12	7	2

mutation des rangées correspondantes, autant de carrés semi-diaboliques. Par exemple, le carré diabolique du diagramme n° 19 donne,

la permutation des rangées correspondantes le carré semi-diabo- du diagramme n° 20. La généralité de cette transformation nous

Diagr. 20.

3	9	6	16
8	14	1	11
10	4	15	5
13	7	12	2

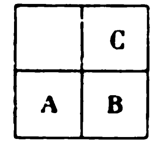
pensé de représenter ces 48 carrés semi-diaboliques sur nos ches.

Outre ces carrés, il y a encore 336 carrés semi-diaboliques que déduit des carrés diaboliques par des transformations très simples communes aux trois classes. Nous les avons représentés par types donnant chacun 8 carrés semi-diaboliques. Il est facile de voir e dans les 6 premiers types (n°s 2 et 3) toutes les rangées horizontales verticales se sont conservées, en changeant d'ordre et avec quelques odifications d'ordre de leurs nombres; et que dans les 36 autres pes (n°s 4 à 15) les rangées horizontales ou verticales se sont seules nservées.

Ainsi, l'adoption des deux transformations générales que nous ons expliquées dans les art. 5 à 10 de notre Livre nous a permis de présenter, au moyen de 45 types, les 432 carrés que Frenicle avait arqués par les lettres α, β et γ.

Quant aux 448 carrés magiques simples, les rangées horizontales verticales ne se sont conservées que dans la moitié de ce nombre, est-à-dire dans 224 carrés. Dans les 224 autres carrés simples, deux ngées horizontales ou verticales du carré diabolique de la même asse se sont seules conservées, tandis que chacune des deux autres ngées du carré simple est formée par les 4 nombres d'une des divi- ons du carré diabolique indiquées par les lettres A, B, ..., L sur les diagrammes 20 *bis*. Il est facile de voir sur les Planches I à VI que

Diagr. 20 *bis*.



F
D E D

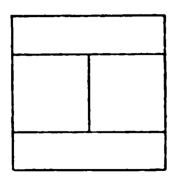
H
G
H

L
J K J
L

utes les formes ne sont pas également applicables aux trois classes,

qu'il y a des formes qui donnent un nombre égal de types dans les trois classes, comme, par exemple, les formes nos **16**, **51** et qu'il y en a qui ne donnent des types que dans deux classes ou dans une seule, comme, par exemple, les formes nos **21**, **22**, **34**, **53**, ... Il y a même une forme qui ne s'applique à aucune classe; elle est indiquée sur le diagramme n° **21**. Voilà pourquoi le nombre des types de carrés simples

Diagr. 21.



n'est pas égal pour toutes les classes et, tandis que la classe I en a 40, la classe II en a 28 et la classe III, 44, le nombre total de types des carrés simples étant 112.

Parmi ces 112 types de carrés simples, il y a 4 types, nos **22**, **29**, **50** et **57**, qui ne possèdent pas la troisième et la quatrième propriété, exposées dans les pages 39 et 40 de notre Livre. Nous appellerons ces carrés *carrés gauches*. Il est facile de voir que ce sont les seuls dans lesquels deux rangées horizontales ou verticales sont formées par les combinaisons du IIIe groupe, tandis que les deux autres sont formées par les combinaisons du IIe groupe.

Ainsi les 157 types que nous donnons représentent tous les 880 carrés de 4

$$3 \times 32 + 42 \times 8 + 112 \times 4 = 880.$$

La classification de ces types permet de s'assurer qu'aucun d'eux n'est identique aux autres. Si l'on compte le nombre des carrés dans lesquels, parmi les 4 nombres occupant les angles, les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 sont les plus faibles, on trouve les nombres 208, 200, 166, 178, 64, 48 et 16, donnés par Frénicle. Évidemment, ce sont les mêmes carrés qu'a trouvés Frénicle, d'autant plus que M. Delannoy est arrivé au même résultat par une méthode toute différente, basée sur la constitution des diagonales des deux carrés composants, formés, l'un avec les nombres 1, 2, 3, 4, et l'autre avec les nombres 0, 4, 8, 12.

Ces 880 carrés produisent par la rotation et le retournement $880 \times 8 = 7040$ variantes qui peuvent servir de noyau central dans les carrés à enceinte. Malgré cela plusieurs auteurs ont voulu dépasser le chiffre 880; Violle a prétendu pouvoir construire 1580 car-

rés; en l'imitant, nous avons cru arriver au chiffre de 1016, mais, après avoir bien vérifié nos types, nous avons vu que plusieurs d'entre eux étaient identiques aux autres.

On sait que, pour tout carré semi-magique, il y a $2n$ égalités relatives aux rangées parallèles aux côtés et que, outre cela, on a la somme de tous les n^2 nombres donnés. Or deux de ces égalités sont évidemment la conséquence des autres, de sorte que, pour les carrés semi-magiques, on n'a que $(2n-1)$ égalités indépendantes. Pour avoir un carré magique simple, il est nécessaire d'ajouter encore deux égalités relatives aux diagonales, car on peut construire des carrés semi-magiques dans lesquels une diagonale donne la somme s (diagrammes n°s 22 et 23). Ainsi, pour les carrés magiques simples, on n'a que

Diagr. 22.

1	3	16	14
15	13	2	4
10	6	11	7
8	12	5	9

30 (diagonale montante) ; 34 (diagonale descendante)

Diagr. 23.

1	3	14	16
15	13	4	2
6	10	11	7
12	8	5	9

42 (diagonale montante) ; 34 (diagonale descendante)

$(2n+1)$ égalités indépendantes. Quant aux égalités supplémentaires qui expriment les conditions du semi-diabolisme et du diabolisme, elles ne sont pas toutes indépendantes. Ainsi, pour $n=4$, il suffit d'ajouter une des deux égalités (diagramme n° 1)

$$(1)\quad c_1+d_1+c_3+d_3=s \quad \text{ou} \quad (2)\quad c_2+d_4+c_4+d_2=s,$$

pour que l'autre en découle nécessairement et que le carré soit semi-diabolique, parce que $\Sigma c+\Sigma d=2s$.

De même, pour les carrés diaboliques, il suffit d'ajouter encore une des deux paires d'égalités

$$(3)\quad a_1+b_1+c_4+d_4=s \quad \text{ou} \quad (4)\quad a_2+b_2+c_3+d_3=s$$
$$(5)\quad a_3+b_3+c_2+d_2=s \quad \text{ou} \quad (6)\quad a_4+b_4+c_1+d_1=s,$$

de sorte que, pour les carrés de 4 semi-diaboliques et diaboliques, il n'y a réellement que 10 et 12 égalités indépendantes.

CHAPITRE II.

CARRÉS MAGIQUES DES RACINES PLUS ÉLEVÉES QUE 4 (1).

A mesure que la racine n croît, le problème devenant de plus en plus vague et indéterminé, les carrés magiques présentent de moins en moins des propriétés caractéristiques.

Après les carrés de 4, ce sont les carrés de 5 qui sont les plus intéressants. En désignant les cases par des lettres (diagramme n° 24),

Diagr. 24.

I				II
a_1	c_1	f_1	c_3	a_3
d_1	b_1	h_1	b_3	d_3
g_1	k_1	m	k_2	g_2
d_4	b_4	h_2	b_2	d_2
a_4	c_4	f_2	c_2	a_2
III				IV

on trouve

(1) $\Sigma a + \Sigma c + \Sigma f = 2s$, (2) $\Sigma b + \Sigma d + \Sigma h = 2s$,

(3) $\Sigma g + \Sigma k + m = s$, (4) $\Sigma a + \Sigma d + \Sigma g = 2s$,

(5) $\Sigma b + \Sigma c + \Sigma k = 2s$, (6) $\Sigma f + \Sigma h + m = s$,

(7) $\Sigma a + \Sigma b + 2m = 2s$;

en additionnant les égalités (1) et (2) et en retranchant l'égalité (6), on a

(8) $$\Sigma a + \Sigma b + \Sigma c + \Sigma d = 3s + m,$$

(1) Ce Chapitre est destiné à compléter l'art. 13.

c'est-à-dire que la somme des 16 nombres des 4 quartiers angulaires est égale à la somme de trois rangées, augmentée du nombre placé à la case centrale. En combinant les égalités (7) et (8), on trouve

$$\Sigma c + \Sigma d = s + 3m. \tag{9}$$

Pour que le carré soit semi-diabolique, il faut avoir, outre cela (p. 33),

$$\Sigma c + \Sigma d = 2\,\frac{(1+n^2)(n-1)}{2} = 2\,\frac{n-1}{n}\,s. \tag{10}$$

En combinant ces égalités, on a

$$m = \frac{1}{3}\left(2\,\frac{n-1}{n} - 1\right)s;$$

en faisant $n = 5$, $s = 65$, on trouve

$$m = 13,$$

c'est-à-dire que les carrés de 5 ne peuvent être semi-diaboliques qu'à condition que la case centrale soit occupée par le nombre moyen 13.

Dans l'art. **8**, à la page 35 de notre Livre, nous avons montré que, quand n est un nombre premier, comme 5, 7, 11, 13, ..., on peut transformer en carrés diaboliques les carrés semi-diaboliques obtenus par la méthode de Bachet, en faisant permuter les rangées horizontales ou verticales dans l'ordre suivant :

$$\text{(I)}\ \left(\frac{n+1}{n}+1\right),\qquad \text{(II)}\ \left(\frac{n+1}{n}+2\right),\qquad \text{(III)}\ \ldots.$$

Ainsi, pour $n = 5$, il faut disposer les rangées de la manière suivante : I, IV, II, V, III, ou, pour avoir 13 à la case centrale, II, V, III, I, IV. Ce carré diabolique, représenté sur le diagramme **11** de la *Pl. II*, peut être varié de quatre manières :

1° On peut faire permuter entre eux le premier et le second nombre, ainsi que le quatrième et le cinquième nombre de chaque section de la progression 1, 2, 3, ..., 25; en opérant cette transformation, on obtient le carré du diagramme n° **15**;

2° Dans chacun de ces deux carrés n°s 11 et 15, on fait permuter le second et le quatrième nombre de chaque section, après quoi l'on obtient encore deux carrés n°s 7 et 3;

3° Dans chacun de ces quatre carrés on fait permuter le premier et le cinquième nombre de chaque section, ce qui donne encore quatre carrés n°s 4, 8, 12 et 16;

4° Enfin, dans tous les 8 carrés on fait permuter entre elles la

deuxième et la troisième section, et l'on obtient encore 8 carrés, n°s 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13 et 14, de sorte qu'on a 16 différents types de carrés diaboliques de 5, lesquels, par la rupture, donnent $16 \times 5^2 = 400$ carrés différents.

Nous ne savons pas si quelqu'un a obtenu autant de carrés diaboliques de 5. En examinant les recherches de Frénicle, insérées dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris,* 1729, nous avons remarqué que ces 16 types se déduisent aussi, par notre procédé indiqué à l'art. 8, des carrés A, B, C, D et des suivants, que Frénicle a obtenus en faisant permuter les rangées dans le carré préliminaire tracé par la méthode de Bachet.

Ces 16 types, semblablement disposés sur la *Pl. VII*, ont des propriétés assez remarquables :

1° Ils sont tous non seulement diaboliques, mais aussi semi-diaboliques. Ils restent semi-diaboliques après la permutation de 4 rangées correspondantes, ce qui se comprend facilement, car les 4 nombres des demi-diagonales forment deux couples de nombres complémentaires; mais cette transformation détruit le diabolisme, comme la rupture du carré détruit le semi-diabolisme.

2° Il résulte des transformations au moyen desquelles nous avons obtenu ces 16 types que, si la case $\frac{1}{1}$ (diagramme n° 25) est occupée

Diagr. 25.

	1	2	3	4	5
1	p	23			
2			q		
3			13		$6-q$
4		$6-p$			
5			r	3	

par le plus petit nombre, que nous désignerons par p et qui ne peut être que 1, 2, 4 ou 5, la case $\frac{1}{2}$ sera toujours occupée par le nombre 23 et la case opposée $\frac{5}{4}$ par son complément 3, la case $\frac{4}{2}$ sera occupée par le nombre $(6-p)$ et, la case $\frac{2}{3}$ étant occupée par un des nombres 1, 2, 4 ou 5, que nous désignerons par q, la case $\frac{3}{5}$ le sera par le nombre $(6-q)$; enfin la case $\frac{5}{3}$ sera occupée par un des nombres $(p+5)$ ou $(p+15)$, que nous désignerons par r.

3° Dans tous ces types on a les relations suivantes (diagramme

n° 26) :

$$(1)\ \Sigma e = 39, \qquad (2)\ \Sigma f = 39,$$

$$(3)\ \Sigma g = \Sigma h, \qquad (4)\ g + \Sigma k = 52, \qquad (5)\ e + e' = f + 13.$$

Pour que le type soit plus complètement déterminé, il suffit de

Diagr. 26.

		h'	e	e'
f'				e''
k	f''	13		
f	k'	h		
g		k''		g'

choisir les nombres p, q et r dans les limites que nous avons indiquées et de calculer tous les nombres au moyen du diagramme n° **27**.

Diagr. 27.

p	23	$26-r$	$16-q$	$q+r-p$
$16-p$	$6+r-(p+q)$	q	$20+p$	$23+p-r$
$20+q$	$20+2p-r$	13	$6+r-2p$	$6-q$
$3+r-p$	$6-p$	$26-q$	$20+p+q-r$	$10+p$
$26+p-(q+r)$	$10+q$	r	3	$26-p$

Si l'on fait rompre un type des carrés diaboliques et si, dans cette variante, aussi diabolique, on fait permuter les rangées correspondantes, on n'obtient qu'un carré simple.

On peut déduire de ces types, par des transformations analogues à celles que nous avons employées pour les carrés de 4, un nombre très considérable de carrés semi-diaboliques et simples.

Si n est un nombre impair composé, les carrés diaboliques de cette sorte ne sont possibles, d'après M. Lucas, que si n ne contient pas le facteur 3, par exemple, pour $n = 25$, 35, 55, 77, ...; mais si n

contient ce facteur, par exemple, si $n = 9, 15, 21, \ldots$ les carrés diaboliques sont impossibles. Dans ce dernier cas on obtient, par le procédé indiqué dans l'art. 8 de notre Livre, des carrés qui ne peuvent se rompre que par tranches de 3, 6, 9, ... bandes. Tels sont les carrés de 9 et de 15, représentés sur les diagrammes nos 28 et 29, dans les-

Diagr. 28.

47	7	39	80	31	72	23	55	15
36	68	19	60	11	52	3	44	76
16	48	8	40	81	32	64	24	56
77	28	69	20	61	12	53	4	45
57	17	49	9	41	73	33	65	25
37	78	29	70	21	62	13	54	5
26	58	18	50	1	42	74	34	66
6	38	79	30	71	22	63	14	46
67	27	59	10	51	2	43	75	35

quels on peut transporter des tranches de 3 bandes. Ainsi, par la rupture, le premier donne $3^2 = 9$ variantes et le second en donne $5^2 = 25$.

L'examen de ces carrés fait voir que les différences des deux nombres voisins, dans les rangées horizontales, verticales et diagonales, présentent des nombres constants, et que les nombres consécutifs se suivent, imitant les sauts du cavalier des échecs: la loi de leur marche peut être facilement comprise, de manière à permettre de construire immédiatement les carrés de cette espèce, pour tout n impair premier ou composé.

On remarque aussi que, dans les carrés nos 28 et 29, les deux diagonales [illegible] compartiments de 9 cases sont égales entre [illegible] 28 [illegible] petites diagonales sont [illegible] nº 29, quoique différentes [illegible] sont aussi égales entre [illegible] chaque [illegible] axe, en faisant la [illegible] Comme [illegible] qui donne.

:c le carré primitif, 2 variantes, puis, dans ces 2 variantes, retourner deuxième tranche, ce qui donne en tout 4 variantes, puis retourner is ces 4 variantes la troisième tranche, et ainsi de suite, il est facile voir que la transformation des tranches horizontales ou verticales nne, pour un carré comprenant t tranches, un nombre de variantes il à 2^t, le carré primitif y compris, et que la transformation successive des tranches horizontales et des tranches verticales donne $\times 2^t = 2^{2t}$ variantes. Par exemple, pour $t = 5$, on aura $2^{10} = 1024$ ·iantes, et, pour $t = 3$, on aura $2^6 = 64$ variantes. Ces carrés oc-

Diagr. 29.

25	123	11	109	222	95	208	81	194	67	180	53	151	39	137
186	74	172	60	158	31	144	17	130	3	116	214	102	200	88
122	10	108	221	94	207	80	193	66	179	52	165	38	136	24
73	171	59	157	45	143	16	129	2	115	213	101	199	87	185
9	107	220	93	206	79	192	65	178	51	164	37	150	23	121
170	58	156	44	142	30	128	1	114	212	100	198	86	184	72
106	219	92	205	78	191	64	177	50	163	36	149	22	135	8
57	155	43	141	29	127	15	113	211	99	197	85	183	71	169
218	91	204	77	190	63	176	49	162	35	148	21	134	7	120
154	42	140	28	126	14	112	225	98	196	84	182	70	168	56
105	203	76	189	62	175	48	161	34	147	20	133	6	119	217
41	139	27	125	13	111	224	97	210	83	181	69	167	55	153
202	90	188	61	174	47	160	33	146	19	132	5	118	216	104
138	26	124	12	110	223	96	209	82	195	68	166	54	152	40
89	187	75	173	46	159	32	145	18	131	4	117	215	103	201

1695
1680
1710
1695
1680
1710
1695
1680
1710
1695
1680
1710
1695
1680
1710

1695 1695 1695 1695 1695

pent une place intermédiaire entre les carrés diaboliques et les ·rés semi-diaboliques, comme les carrés de n pairement pairs, conuits au moyen de la méthode graphique (p. 41).

Disons quelques mots des carrés de n impairement pairs. Il est fae de se convaincre que, dans ce cas, les carrés diaboliques sont possibles, comme nous l'avons dit à la page 35 de notre Livre. Dans

tous ces carrés la somme des n^2 nombres de la progression $1, 2, \ldots, n^2$ étant égale à $\frac{(1+n^2)n^2}{2}$ n'est pas divisible par 4, ce qui fait voir que ces carrés ne peuvent pas être divisés en 4 quartiers égaux, et que ce ne sont que les 2 quartiers opposés qui y sont égaux, comme il est dit plus haut (diagramme n° 2). Pour $n = 6$, on déduit des égalités fondamentales les égalités suivantes (diagramme n° 30) :

(1) $\Sigma a + \Sigma c + \Sigma f = 2s$, (2) $\Sigma b + \Sigma d + \Sigma h = 2s$,
(3) $\Sigma g + \Sigma k + \Sigma l = 2s$, (4) $\Sigma a + \Sigma d + \Sigma g = 2s$,
(5) $\Sigma b + \Sigma c + \Sigma k = 2s$, (6) $\Sigma f + \Sigma h + \Sigma l = 2s$,
(7) $\Sigma a + \Sigma b + \Sigma l = 2s$;

Diagr. 30.

a	c	f	f	c	a
d	b	h	h	b	d
g	k	l	l	k	g
g	k	l	l	k	g
d	b	h	h	b	d
a	c	f	f	c	a

d'où l'on tire

(8) $\Sigma c + \Sigma d = 2\Sigma l$,
(9) $\Sigma a + \Sigma b = \Sigma g + \Sigma k = \Sigma f + \Sigma h = 2s - \Sigma l$,
(10) $\Sigma a + \Sigma b + \Sigma c + \Sigma d = 2s + \Sigma l$.

Ces relations peuvent servir de point de départ à des études fort intéressantes. Par des considérations d'un autre genre, M. V. Coccoz est arrivé à des résultats qui s'accordent avec les nôtres et en démontreraient au besoin l'exactitude. Passant de la théorie à la pratique, il a composé plusieurs carrés, parmi lesquels nous choisissons les deux représentés sur les diagrammes nos 31 et 32. Les nombres situés sur les diagonales du carré n° 31 sont groupés de manière à présenter aux angles la plus petite somme possible, $2 + 11 + 3 + 10 = 26$. Après des transformations applicables à tous les carrés, on pourrait y compter la plus grande somme, 123 ou la moyenne 74. Le carré n° 32 est la solution de ce problème : obtenir avec les nombres inscrits dans les 16 cases du noyau intérieur la même somme 333 qu'avec ceux des 20 cases qui encadrent le noyau et lui servent de bordure.

Disons quelques mots des carrés semi-magiques de 64 cases que

l'on obtient par la marche du cavalier. Dans ces carrés il n'y a que les rangées parallèles aux côtés qui donnent la somme égale à $s = 260$, tandis que les diagonales ne la donnent jamais, du moins sur des échiquiers de 64 cases, ainsi que nous l'avons constaté en examinant la

Diagr. 31.

2	27	20	23	28	11
30	21	6	7	16	31
15	5	36	35	1	19
22	12	26	25	8	18
32	13	9	4	24	29
10	33	14	17	34	3

Diagr. 32.

19	8	16	15	28	25
27	5	23	21	6	29
18	35	12	9	20	17
1	24	22	30	32	2
10	13	34	33	14	7
36	26	4	3	11	31

collection de M. Feisthamel, qui s'est spécialement occupé de cette question. D'après lui le nombre des types des carrés semi-magiques de cette espèce, connus en France, atteint maintenant 82. Parmi ceux-ci 27 sont formés de chaînes fermées; l'une d'elles fournit huit variantes et les autres n'en fournissent que quatre. Nous ne donnons que deux carrés (diagrammes n°s 33 et 34); le premier, construit par M. Feisthamel, donne une chaîne ouverte, et le second, dû à M. Palamède, donne une chaîne fermée.

Diagr. 33.

= 260

18	27	44	39	50	29	46	7	= 260
43	40	19	28	45	6	49	30	
26	17	38	41	32	51	8	47	
37	42	25	20	5	48	31	52	
64	21	16	33	60	53	4	9	
15	36	61	24	1	12	57	54	
22	63	34	13	56	59	10	3	
35	14	23	62	11	2	55	58	

Diagr. 34.

= 260

18	31	56	37	16	33	58	11	= 260
55	38	17	32	57	12	15	34	
30	19	40	53	36	59	10	13	
39	54	29	20	9	14	35	60	
28	3	46	41	52	61	22	7	
45	42	27	4	21	8	51	62	
2	47	44	25	64	49	6	23	
43	26	1	48	5	24	63	50	

CHAPITRE III.

LES CARRÉS MAGIQUES A ENCEINTE OU A BORDURE (1).

Frénicle, inventeur des enceintes, les a considérées comme une méthode générale pour la construction des carrés magiques dont la racine dépasse 4. En effet, cette méthode s'applique à tous les carrés plus facilement que les autres et fournit beaucoup de solutions. Il a même donné, dans son Mémoire inséré dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences,* 27 carrés de 5 à enceinte, réguliers et non réguliers, dont chacun produit $8 \times 6 \times 6 = 288$ variantes. Nous avons montré, dans notre Livre, qu'il n'y a pour $n = 5$ que 10 enceintes des carrés réguliers, dont le noyau central est composé des nombres consécutifs, et forme une progression arithmétique non interrompue, de sorte que le nombre des carrés de 5 à enceinte réguliers se monte à 2880. Violle, comme nous l'avons dit à la page 43, a calculé que, pour $n = 5$, il y a plus de 1 million de carrés à enceinte réguliers et irréguliers. Mais il est évident que, pour toutes les valeurs de n, le nombre des carrés, sans enceinte ou ordinaires, surpasse toujours le nombre des carrés à enceinte. D'abord, chaque carré à enceinte simple donne, par la double rupture, un carré sans enceinte; quant aux carrés à enceinte semi-diaboliques, comme ceux qui sont représentés sur les diagrammes nos 35 à 38, chacun d'eux donne, par la rupture, trois carrés ordinaires. Enfin, on peut faire perdre aux carrés leur enceinte par des

Diagr. 35.

2	23	25	7	8
4				22
21				5
20				6
18	3	1	19	24

Diagr. 36.

1	19	20	22	3
21				5
2				24
18				8
23	7	6	4	25

(1) Ce Chapitre sert de complément à l'art. 11 de notre Livre.

transformations partielles, représentées sur les *fig.* 35 à 38 de notre Atlas. Par exemple, dans le carré n° 199, on peut transposer les couples (14,5) et (17,2), après quoi le carré perd son enceinte. Cela fait voir que si, pour $n = 5$, le nombre des carrés à enceinte surpasse 1 million, celui des carrés sans enceinte ne peut pas être égal à 53000, chiffre calculé par Violle et mentionné dans notre Livre.

Diagr. 37.

1	6	27	34	35	8
7	23	14	26	11	30
32	21	16	20	17	5
33	12	25	13	24	4
9	18	19	15	22	28
29	31	10	3	2	36

Diagr. 38.

3	30	29	10	33	6
1	24	21	12	17	36
9	11	16	25	22	28
35	26	19	14	15	2
32	13	18	23	20	5
31	7	8	27	4	34

Pour $n = 6$ nous avons construit 131 enceintes des carrés réguliers, dont le noyau est composé des 16 nombres de 11 à 26. Nous avons employé avec avantage le procédé suivant pour construire ces enceintes.

Pour $n = 5$, l'enceinte des carrés réguliers est formée avec 8 petits nombres de 1 à 8 et 8 grands nombres de 18 à 25. Les petits nombres peuvent être distribués sur les côtés de l'enceinte de deux manières, indiquées sur les diagrammes n°s 39 et 40, où ils sont désignés par de petites lettres a, b, c, ... Il est facile de trouver pour la première disposition

Diagr. 39.

a	c			b
e				
				f
				f'
		d'	d	

Diagr. 40.

a				b
e				
				f
				f'
	d''	d'	d	

(I) $$e = 18 - c - \frac{3a + b}{2},$$

et, pour la dernière,

(II) $$e = 5 - \frac{3a + b}{2},$$

et l'on a, pour les deux formes,

$$\text{III)}\qquad f+f'=\Sigma f=e+13-(b-a).$$

Nous supposerons toujours que, des deux nombres placés aux angles, a est plus petit que b. Pour que les égalités I et II donnent des nombres entiers, il faut que le binôme $(3a+b)$ soit divisible par 2, ce qui ne peut se faire que si a et b sont à la fois pairs ou impairs. La forme II ne convient que pour $a=1$ et $b=3$. Ce sont ces formules I à III qui nous ont donné les 10 types d'enceintes représentés sur les *fig.* 177 à 186 de l'atlas.

Quand $n=6$, il n'y a qu'une seule forme de distribution des 10 petits nombres de 1 à 10, représentée sur le diagramme n° **41**. La

Diagr. 41.

a	c				b
e					
e'					
					f
					f'
		d''	d'	d	

somme de ces nombres étant égale à 55, on trouve

$$\text{(I)}\quad a+b+c=\Sigma d,\qquad \text{(II)}\quad a+\Sigma e=b+\Sigma f,$$

$$\text{(III)}\quad c+\Sigma e=\frac{55-3a-b}{2},\qquad \text{(IV)}\quad \Sigma d+\Sigma f=\frac{55-(b-a)}{2}.$$

Pour avoir des nombres entiers, il faut que a et b soient de parité différente.

Ces relations facilitent beaucoup la formation des enceintes. Prenons, par exemple, $a=4$ et $b=7$. La formule III donne

$$c+\Sigma e=18.$$

On peut former cette somme, par une des combinaisons suivantes, des nombres qui restent libres

$$(1+8+9),\ (2+6+10),\ (3+5+10)\ \text{et}\ (3+6+9).$$

Prenons la combinaison $(2+6+10)$ et faisons

$$c=2,\quad \Sigma e=6+10=16.$$

La formule II donne

$$\Sigma f = 4 + 16 - 7 = 13.$$

Or il est possible d'obtenir cette somme en prenant pour f et f' les nombres 5 et 8. Les trois nombres libres 1, 3 et 9 occuperont les places d, d' et d'', et nous aurons l'enceinte représentée sur le diagramme n° 42. C'est ainsi que nous avons trouvé 131 enceintes, représentées

Diagr. 42.

4	2				7
6					
10					
					5
					8
		9	1	3	

par des suites de chiffres dont le premier à gauche exprime a, le second b, le troisième c, le quatrième et le cinquième les deux e, et les deux derniers, les deux f. (Les deux chiffres consécutifs 1 et 0 doivent toujours être lus ensemble comme formant le nombre 10.)

N°s		N°s		N°s		N°s	
1.	12961078	2.	12107859	3.	14879310	4.	14978210
5.	14105938	6.	14106829	7.	16581049	8.	16851037
9.	16941027	10.	16104935	11.	18391057	12.	18571046
13.	1867945	14.	18751026	15.	1876935	16.	18931024
17.	1896724	18.	18105723	19.	11048926	20.	11048935
21.	11057934	22.	11067824	23.	11075923	24.	11076823
25.	23869410	26.	23941058	27.	23941067	28.	23104957
29.	23106748	30.	25481069	31.	2576948	32.	25103918
33.	25104836	34.	27381049	35.	27561038	36.	27651019
37.	2784935	38.	2794816	39.	27103815	40.	29371046
41.	29461018	42.	29731015	43.	2985714	44.	34561078
45.	3467859	46.	34867210	47.	34957110	48.	34105619
49.	34105628	50.	3647958	51.	36578210	52.	3674928
53.	3675819	54.	36821045	55.	36101925	56.	38451019
57.	38541027	58.	3864917	59.	38721016	60.	31018946
61.	31027918	62.	31045916	63.	31056724	64.	31065714
65.	31084612	66.	45361078	67.	45721038	68.	45739110
69.	45811026	70.	4582937	71.	4592836	72.	4593718
73.	45101826	74.	45103617	75.	47261058	76.	47369210
77.	47531019	78.	47531028	79.	47621018	80.	4763918
81.	4781925	82.	4793615	83.	49161038	84.	49251037

N°		N°		N°		N°	
85.	4936827	86.	49521016	87.	4963815	88.	56278410
89.	5682714	90.	5691734	91.	58169210	92.	5836719
93.	58421036	94.	5843927	95.	5861934	96.	5873624
97.	51016827	98.	51024917	99.	51062713	100.	67141058
101.	67159310	102.	67231048	103.	6725839	104.	67348110
105.	6734829	106.	67411028	107.	6743819	108.	6783415
109.	6791525	110.	69131028	111.	6915837	112.	6925718
113.	6943725	114.	6951824	115.	6972713	116.	78121056
117.	7813956	118.	78211046	119.	7825619	120	7852634
121.	7863415	122.	71012935	123.	71021934	124.	71031824
125.	8913745	126.	8914627	127.	8923617	128.	8924517
129.	8931725	130.	91012634	131.	91023415		

Dans cette Table, l'exemple que nous avons donné est représenté par la suite n° 75.

Ici nous terminons nos recherches sur les carrés magiques qui ont jadis occupé Fermat. Aujourd'hui, M. Édouard Lucas a eu le bonheur de mettre la main sur des manuscrits originaux et inédits de ce grand géomètre, dont il a commencé la publication ([1]). Avant l'honneur de connaître personnellement ce savant, qui a fait de nombreuses et excellentes recherches sur l'Analyse indéterminée et l'Arithmétique supérieure, nous ne doutons pas que son nouveau travail présentera beaucoup d'intérêt, surtout s'il y introduit ses propres recherches, fort intéressantes.

([1]) *Journal de Mathématiques élémentaires*, mai 1885.

NOTES.

NOTE I.

Ainsi que nous l'avons dit, dans notre Avant-Propos, il importe de multiplier les méthodes pour éclaircir les questions; nous jugeons donc utile de reproduire *in extenso* la méthode employée par M. Delannoy pour trouver le nombre des carrés de 4.

On peut obtenir ces carrés en formant des carrés magiques avec les nombres 1, 2, 3, 4 (1er Tableau), puis avec les nombres 0, 4, 8, 12 (2e Tableau) et en additionnant les termes correspondants des deux Tableaux.

La réunion d'une diagonale du 1er Tableau et d'une diagonale du 2e doit donner la somme 34. La diagonale du 2e Tableau est un multiple de 4, par suite celle du 1er doit être égale à 2 plus un multiple de 4. Les seuls multiples de 4 augmentés de 2, que l'on puisse former avec 4 nombres pris de 1 à 4, sont

6, 10 et 14.

Les diagonales correspondantes du 2e Tableau sont

28, 24 et 20.

LES DIFFÉRENTS TYPES.

Les seuls types qui satisfassent à la question, sans que l'addition des nombres produise des répétitions de termes, sont les suivants :

Type A. — Chaque diagonale comprend un moyen et un extrême répétés 2 fois. Ce type ne donne que des premiers Tableaux, dont les diagonales sont

1, 1, 2, 2 et 3, 3, 4, 4.

Type B. — Chaque diagonale comprend un extrême répété 3 fois et un moyen. Ce type ne donne également que des premiers Tableaux ; les diagonales sont

1, 1, 1, 3 et 4, 4, 4, 2.

Type B'. — Chaque diagonale comprend un moyen répété 3 fois et un

extrême. Ce type fournit des premiers et des deuxièmes Tableaux; les diagonales sont

2, 2, 2, 4 et 3, 3, 3, 1

ou

8, 8, 8, 0 et 4, 4, 4, 12.

Type C. — Chaque diagonale comprend un moyen répété 2 fois et les 2 extrêmes. Ce type ne donne que des deuxièmes Tableaux dont les diagonales sont

0, 4, 4, 12 et 0, 8, 8, 12.

Type D. — Chaque diagonale comprend un moyen et un extrême avec l'autre moyen (ou l'autre extrême) répété 2 fois. Ce type ne fournit aussi que des deuxièmes Tableaux; les diagonales sont

0, 4, 12, 12; 0, 4, 8, 8; 4, 4, 8, 12; 0, 0, 8, 12.

Type G. — Chaque diagonale comprend soit les 2 moyens et les 2 extrêmes, soit les 2 extrêmes (ou les 2 moyens) répétés 2 fois. Ce type donne des premiers et des deuxièmes Tableaux; les diagonales sont

1, 2, 3, 4; 1, 1, 4, 4; 2, 2, 3, 3

ou

0, 4, 8, 12; 0, 0, 12, 12; 4, 4 8, 8.

I. — Combinaisons des types A et C.

Le type A donne avec C les 3 carrés nos 1, 2, 3.

1

1, 0	4, 8	1, 12	4, 4
4, 12	1, 8	4, 0	1, 4
2, 0	3, 4	2, 12	3, 8
3, 12	2, 4	3, 0	2, 8

2

1, 0	2, 4	4, 8	3, 12
4, 12	1, 8	3, 4	2, 0
1, 12	4, 4	2, 8	3, 0
4, 0	3, 8	1, 4	2, 12

3

1, 0	3, 12	2, 0	4, [illegible]
4, 8	2, 8	3, 4	1, [illegible]
1, 12	3, 0	2, 12	4, [illegible]
4, 4	2, 4	3, 8	1, [illegible]

Le carré n° 1 en donne un autre en permutant simultanément 1 et 4, 2 et 3, 0 et 12, 4 et 8. Chacun de ces carrés en fournit 4 autres par les transformations générales, consistant à permuter soit les quartiers opposés, soit les lignes intérieures, puis les colonnes intérieures. Ce carré n° 1 donne donc en tout 8 carrés.

Le carré n° 2 en fournit un autre par la permutation indiquée pour le n° 1. Chacun d'eux donne un autre carré en permutant les nombres médians de la première ligne, puis les nombres médians de la dernière. En appliquant à ces 4 carrés les transformations générales, on obtient en tout

$4 \times 4 = 16$ carrés.

Le carré n° 3 en donne un autre en permutant les chiffres 1 et 2, 3 et 4.

Chacun d'eux en fournit deux autres en permutant soit les nombres médians de la première ligne avec ceux de la dernière, soit les nombres médians de la première colonne, puis les nombres médians de la dernière. Avec les transformations générales on obtient donc.

$$2 \times 4 \times 4 = 32 \text{ carrés.}$$

Ainsi la combinaison des types A et C produit

$$8 + 16 + 32 = 56 \text{ carrés.}$$

II. — Combinaisons des types A et D.

Le type A donne avec D les carrés nos 4, 5, 6.

4

2, 8	3, 12	4, 4
2, 4	3, 0	1, 8
3, 8	2, 12	4, 0
3, 4	2, 0	1, 12

5

1, 0	4, 4	2, 8	3, 12
4, 12	1, 12	3, 0	2, 0
1, 4	4, 0	2, 12	3, 8
4, 8	1, 8	3, 4	2, 4

6

1, 12	4, 12	2, 0	3, 0
4, 0	1, 4	3, 8	2, 12
1, 8	4, 8	2, 4	3, 4
4, 4	1, 0	3, 12	2, 8

Le carré n° 4 en donne un autre en permutant 1 et 2, 3 et 4. Chacun d'eux, ainsi que les carrés 5 et 6, en fournit 16 autres, comme le n° 2 et par les mêmes transformations.

La combinaison des types A et D produit donc

$$4 \times 16 = 64 \text{ carrés.}$$

III. — Combinaisons des types B et C.

Le type B donne avec C les 3 carrés 7, 8, 9.

7

1	3, 4	2, 8	4, 12
2	1, 8	4, 4	3, 0
2	2, 4	3, 8	2, 0
	4, 8	1, 4	1, 12

8

1, 0	3, 4	2, 8	4, 12
4, 8	1, 8	4, 4	1, 4
3, 12	4, 0	1, 12	2, 0
2, 4	2, 12	3, 0	3, 8

9

1, 0	1, 4	4, 8	4, 12
2, 8	3, 8	2, 4	3, 4
3, 12	4, 0	1, 12	2, 0
4, 4	2, 12	3, 0	1, 8

Chacun de ces carrés en donne 16 par les mêmes transformations que pour le carré n° 3 (sauf la 1re).

La combinaison des types B et C donne donc

$$3 \times 16 = 48 \text{ carrés.}$$

IV. — Combinaisons des types B et D.

Le type B donne avec D les 3 carrés **10**, **11**, **12**.

10

1, 0	2, 12	3, 4	4, 8
4, 12	1, 4	2, 8	3, 0
1, 8	4, 0	3, 12	2, 4
4, 4	3, 8	2, 0	1, 12

11

1, 0	3, 8	2, 12	4, 4
4, 12	1, 4	4, 0	1, 8
3, 4	4, 8	1, 12	2, 0
2, 8	2, 4	3, 0	3, 12

12

1, 0	4, 4	1, 8
3, 4	1, 12	4, 0
2, 12	2, 0	3, 1
4, 8	3, 8	2, 4

Ces 3 carrés en fournissent respectivement le même nombre que l
nos **1**, **2** et **3**, au moyen des mêmes transformations (la 1re transformati
du carré n° **12** diffère seule de celle du n° 3; on y permute 0 et 8; 4 et 1
au lieu de permuter 1 et 2, 3 et 4).

La combinaison des types B et D donne donc 56 carrés.

V. — Combinaisons des types B' et G.

Le type B' donne avec G le carré n° **13**.

13

1, 0	4, 8	1, 12	4, 4
4, 12	3, 4	2, 0	1, 8
3, 0	2, 8	3, 12	2, 4
2, 12	1, 4	4, 0	3, 8

Ce carré en fournit un autre en permutant 4 et 8; chacun d'eux
donne un autre en permutant 0 et 12 et chacun de ces 4 carrés en don
16 par les mêmes transformations que pour le carré n° **2**. Enfin, dans ch
cun de ces 64 carrés, on peut échanger les 2 Tableaux.

La combinaison des types B' et G produit donc

$$4 \times 16 \times 2 = 128 \text{ carrés.}$$

VI. — Combinaisons du type G avec lui-même.

Le type G donne, par la combinaison de ses premiers avec ses deuxièm
Tableaux, les carrés nos **14** à **27**.

14

1, 0	2, 12	3, 8	4, 4
3, 12	4, 0	1, 4	2, 8
2, 4	1, 8	4, 12	3, 0
4, 8	3, 4	2, 0	1, 12

15

1, 0	4, 8	1, 12	4, 4
3, 12	2, 4	3, 0	2, 8
4, 0	1, 8	4, 12	1, 4
2, 12	3, 4	2, 0	3, 8

16

1, 0	4, 8	3, 4
3, 12	2, 4	1, 8
2, 8	3, 0	4, 1
4, 4	1, 12	2, 0

Le carré n° 14 en donne un autre par l'échange des 2 Tableaux. Chacun des carrés 15 et 16 en fournit un autre en permutant 2 et 3, ce qui nous fait

$$3 \times 2 = 6 \text{ carrés.}$$

17

0	2, 8	3, 4	4, 12
12	4, 4	1, 8	2, 0
12	1, 4	4, 8	3, 0
0	3, 8	2, 4	1, 12

18

1, 0	2, 8	3, 4	4, 12
3, 12	4, 4	1, 8	2, 0
4, 8	3, 0	2, 12	1, 4
2, 4	1, 12	4, 0	3, 8

19

1, 0	4, 8	3, 12	2, 4
1, 12	4, 4	3, 0	2, 8
4, 0	1, 8	2, 12	3, 4
4, 12	1, 4	2, 0	3, 8

Les carrés 17, 18, 19 en donnent 6 par des transformations identiques à celles des n°s 14 à 16; mais, en outre, chacun de ces 6 carrés en fournit un autre en permutant les nombres médians de la première colonne, puis ceux de la dernière, ce qui produit en définitive

$$6 \times 2 = 12 \text{ carrés.}$$

20

1, 0	2, 12	4, 4	3, 8
3, 12	4, 0	2, 8	1, 4
4, 8	3, 4	1, 12	2, 0
2, 4	1, 8	3, 0	4, 12

21

1, 0	4, 8	4, 4	1, 12
3, 12	2, 4	2, 8	3, 0
2, 12	3, 4	3, 8	2, 0
4, 0	1, 8	1, 4	4, 12

Le carré n° 21 en donne un autre en permutant 2 et 3, ce qui nous fait, pour les n°s 20 et 21, 3 carrés.

22

0	1, 12	4, 4	4, 8
12	4, 0	1, 8	1, 4
8	3, 4	2, 12	2, 0
4	2, 8	3, 0	3, 12

23

1, 0	3, 8	4, 4	2, 12
4, 12	2, 4	1, 8	3, 0
1, 12	3, 4	4, 8	2, 0
4, 0	2, 8	1, 4	3, 12

24

1, 0	3, 8	2, 12	4, 4
4, 12	2, 4	3, 0	1, 8
4, 0	2, 8	3, 12	1, 4
1, 12	3, 4	2, 0	4, 8

25

0	3, 8	2, 12	4, 4
12	2, 4	3, 0	1, 8
4	1, 12	4, 8	2, 0
8	4, 0	1, 4	3, 12

26

1, 0	3, 8	4, 4	2, 12
4, 12	2, 4	1, 8	3, 0
2, 8	4, 0	3, 12	1, 4
3, 4	1, 12	2, 0	4, 8

27

1, 0	4, 0	2, 12	3, 12
4, 12	1, 12	3, 0	2, 0
3, 8	2, 8	4, 4	1, 4
2, 4	3, 4	1, 8	4, 8

Chacun des 6 carrés 22 à 27 en donne un autre en permutant 2 et 3, ce qui fait en tout 12 carrés.

Nous obtenons donc, pour la combinaison du type G avec lui-même,

$$6 + 12 + 3 + 12 = 33 \text{ carrés.}$$

Mais il y a lieu de remarquer que chacun de ces carrés peut en donner

un autre en permutant 4 et 8; chacun de ceux-ci en fournit également un autre en permutant les 2 premières colonnes, puis les 2 dernières. Enfin, il reste à appliquer les transformations générales et l'on obtient ainsi

$$33 \times 4 \times 4 = 528 \text{ carrés.}$$

Récapitulant les résultats obtenus, on trouve

	56 AC
	64 AD
	48 BC
	56 BD
	128 B'G
	528 GG
Total...	880 carrés,

nombre égal à celui trouvé par Frénicle.

Nous les décomposons, dans le Tableau ci-après, en α, β, γ, δ.

NUMÉROS des carrés.	α.	β.	γ.	δ.	SANS MARQUE.
1............	"	"	"	4	4
2............	"	"	"	8	8
3............	"	"	"	32	"
4 à 6........	"	"	"	32	32
7 à 9........	"	"	"	48	"
10............	"	"	"	4	4
11............	"	"	"	8	8
12............	"	"	"	32	"
13............	"	"	"	64	64
14 à 16.......	48	"	48	"	"
17 à 19.......	"	96	"	96	"
20 et 21......	"	"	48	"	"
22 à 27.......	"	96	96	"	"
	48	192	192	328	120
			880		

NOTE II.

M. Delannoy nous a indiqué la méthode suivante pour tracer une marche de cavalier sur un échiquier carré de grandeur quelconque, quand on sait construire cette marche sur les échiquiers de 5, 6, 7 et 8 cases de côté.

I. — Échiquiers impairs.

Dans une bordure de 2 cases de largeur, dont le côté est impair, on peut toujours tracer 2 marches rentrantes.

Par suite, en entourant d'une bordure de 2 cases un échiquier de $4n + 5$ ou de $4n + 7$ cases de côté, on pourra toujours tracer une marche de cavalier de la manière suivante :

1° En partant d'un coin, décrire la 1re marche de bordure qui se termine sur la case conjuguée avec la case de départ;

2° Passer de là sur la 2e case de la diagonale du carré intérieur, parcourir ce carré d'un seul trait et finir sur la dernière case de cette diagonale;

3° Passer sur la case la plus éloignée du coin opposé au coin de départ et décrire la 2e marche de bordure, qui se termine sur l'avant-dernière case de la diagonale passant par la case de départ.

II. — Échiquiers pairs.

Le cadre bordure de 2 cases des échiquiers pairs comprend 4 marches rentrantes qui, réunies 2 à 2, se transforment en 2 marches non rentrantes.

De là la méthode suivante pour tracer une marche de cavalier sur un échiquier de $4n + 6$ ou de $4n + 8$ cases de côté :

1° En partant d'un coin, décrire la 1re marche de bordure qui se termine sur la case située au-dessus de la case de départ;

2° Passer de là sur la 1re case de la diagonale du carré intérieur, parcourir ce carré d'un seul trait et finir sur le coin adjacent;

3° Décrire la 2e marche de bordure qui se termine sur le coin adjacent au coin de départ.

La loi de formation de la marche du cavalier sur un échiquier carré quelconque, de plus de 8 cases de côté, peut donc s'énoncer dans les mêmes termes pour les échiquiers pairs et pour les échiquiers impairs, savoir :

Parcourir d'un seul trait :

1° La 1re marche de bordure;

2° Le carré intérieur;

3° La 2e marche de bordure.

Le carré intérieur se parcourt d'un coin au coin adjacent pour les échiquiers pairs, et d'un coin à l'avant-dernière case de la diagonale passant par ce coin (ou inversement) pour les échiquiers impairs.

... jamais d'hésitation pour tracer les marches de bordure, ... se rapprocher le plus possible du bord extérieur.

Diagr. 43.

[illegible]	70	11	42	55	68	9
[illegible]	43	56	69	10	81	54
39	26	33	22	41	8	67
16	23	40	27	32	53	80
29	38	19	34	21	66	7
24	14	36	31	26	79	52
37	30	[illegible]	20	35	6	65
[illegible]	60	76	63	4	51	78
[illegible]	62	3	50	77	64	5

Diagr. 44.

28	77	12	91	26	75	10	89
13	92	27	76	11	90	25	74
78	29	60	53	36	45	62	51
93	14	35	42	61	52	37	44
30	79	54	59	46	43	50	63
15	94	41	34	65	56	47	38
80	31	58	55	40	67	64	49
95	16	33	66	57	48	39	68
32	81	2	97	18	83	4	99
1	96	17	82	3	98	19	84

... méthode est simple et générale, c'est ce qui fait qu'elle p...

... exemples les marches tracées sur les éch... de côté (diagrammes n[os] 43 et 44).

NOTE III.

SUR LES CARRÉS DIABOLIQUES

Nous reproduisons, d'après M. Édouard Lucas, la théorie des carrés diaboliques qu'il a déduite de ses *Principes de la Géométrie du tissage*.

Cette théorie repose sur les propositions suivantes de l'*Arithmétique supérieure* :

Théorèmes d'Arithmétique.

I. Si l'on divise par un nombre entier p la suite de p termes consécutifs d'une progression arithmétique à termes entiers, on obtient p restes différents reproduisant dans un certain ordre la série naturelle

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (p-1),$$

lorsque le nombre p et la raison r sont des nombres premiers entre eux. Ce théorème bien connu donne lieu, comme on sait, à la théorie des polygones étoilés.

II. Si l'on divise par un nombre entier p la suite des p différences entre les termes consécutifs correspondants de deux progressions arithmétiques de raisons r et s, on obtient les p restes différents de la série naturelle

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (p-1),$$

lorsque le nombre p et la différence $r-s$ des raisons des deux progressions sont deux nombres premiers entre eux.

Cette proposition se déduit immédiatement de la précédente, en observant que les différences des termes correspondants de deux progressions arithmétiques forment une progression arithmétique dont la raison est égale à la différence des raisons des progressions données.

III. Désignons par $\psi(p)$ le nombre des entiers h de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (p-1),$$

tels que $h-e_1, h-e_2, \ldots, h-e_n$ soient des entiers premiers à p, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ étant des entiers quelconques, et par q un entier premier à p, on a la relation

$$\psi(pq) = \psi(p)\psi(q).$$

Cette relation se démontre comme la propriété correspondante de l'indicateur $\varphi(p)$ qui indique le nombre des entiers de la suite $1, 2, \ldots, p$, qui sont premiers à p. D'ailleurs, la fonction numérique ψ devient égale à la fonction φ lorsque l'on suppose $e_1 = e_2 = \ldots = e_n = 0$.

IV. Soient a un nombre premier et λ le nombre des résidus différents

de la suite $e_1, e_2, \ldots, e_n$, pour le module a; on a

$$\psi(a) = a - \lambda \quad \text{et} \quad \psi(a^\alpha) = a^{\alpha-1}(a - \lambda).$$

V. Soient $p = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ un nombre quelconque, décomposé en f
teurs premiers et $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ les nombres des résidus différents de
suite $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pour les modules respectifs $a, b, c, \ldots$; on a

$$\psi(p) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots (a - \lambda)(b - \mu)(c - \nu) \ldots$$

ou encore

$$\psi(p) = \frac{p}{abc\ldots}(a - \lambda)(b - \mu)(c - \nu) \ldots.$$

On retrouve l'expression analytique de l'indicateur $\varphi(p)$ en suppos
$e_1 = e_2 = \ldots = e_n = 0$, et $\lambda = \mu = \nu \ldots = 1$.

Les alignements.

Cela posé, considérons un carré de p^2 cases, p désignant un nom
quelconque, et r un nombre premier à p; nous prendrons, pour fixer
idées, $p = 11$ et $r = 3$ (diagramme n° 45); marquons successivement

Diagr. 45.

cases, en nous élevant par colonnes successives de trois en trois rangs, et
commençant à compter au bas de l'échiquier, lorsque l'on dépasse le b
supérieur, et en revenant à gauche quand on dépasse le bord de droite
forme ainsi ce qu'on appelle un *satin régulier* dans la Géométrie du
sage : nous l'appellerons ici un *alignement de première espèce.*

Puisque p et r sont premiers entre eux, on en déduit tout de suite
la loi de formation que le nombre des cases noires est p et qu'il y e
une dans chaque ligne et dans chaque colonne.

son associé, en exceptant le cas de $r = 1$, ce qui donne le groupe

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p-1 & p-1 \end{vmatrix};$$

l'alignement correspondant donne les diagonales et leurs parallèles;
un nombre r peut être égal à l'associé de son complément, et l'on p
avoir

$$r(p-r) \equiv 1 \pmod{p};$$

il en est ainsi pour l'alignement de pas 5 pour le module 13, et l'on
(diagramme n° 46) le groupement

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

On voit, par ce qui précède, que p est un diviseur de r^2+1.

Diagr. 46.

L'alignement correspondant à cette valeur de r, telle que r^2+1 soit u
multiple de p, donne lieu à une disposition de cases aux sommets d
carrés : on l'appelle *satin carré*. D'ailleurs, il ne saurait exister pour u
module premier p deux alignements de cette nature correspondant à de
pas r et s; car, sans cela, $r^2 - s^2$ ou $(r-s)(r+s)$ serait divisible par p

Donc, pour un nombre premier p, tous les nombres $2, 3, \ldots, (p-2)$ s
partagent en groupes de quatre nombre distincts, complémentaires ou as
sociés; par suite, si $p = 4q + 3$, il ne saurait y avoir de satin carré, puis

qu'il ne peut y en avoir deux; mais, si $p = 4q + 1$, il en existe nécessairement un seul. Ce résultat correspond à ces théorèmes de Fermat :

Tout nombre premier $p = 4q + 1$ divise $a^2 + b^2$, et tout nombre premier $p = 4q + 3$ ne divise pas $a^2 + b^2$.

En effet, soit β l'associé de b. Si p divise $a^2 + b^2$, il divise $a^2\beta^2 + b^2\beta^2$ ou $a^2\beta^2 + 1$, c'est-à-dire $r^2 + 1$.

D'ailleurs, le diagramme n° 46 donne encore une démonstration géométrique immédiate de cet autre théorème de Fermat :

Tout nombre premier $4q + 1$ est nécessairement une somme de deux carrés.

En effet, l'aire du carré qui joint les centres de quatre cases voisines est p, en prenant pour unité le côté d'une case; donc le côté de ce carré est $\sqrt{p}$; mais c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont entiers (2 et 3 dans le diagramme n° 46); par suite,

$$p = a^2 + b^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut appliquer ce mode de raisonnement à un très grand nombre d'autres théorèmes du même genre, tels que ceux qui concernent les diviseurs de $x^2 + 2y^2$, $x^2 + 3y^2$, ... On doit donc considérer la théorie géométrique du tissage comme une fidèle interprétation de la théorie des formes quadratiques. Les développements de cette théorie des tissus simplifient considérablement l'étude abstraite de ce Chapitre important de l'*Arithmétique supérieure*. On étend beaucoup ces résultats en remplaçant les carrés de l'échiquier par des parallélogrammes, et en passant ensuite dans l'espace à trois dimensions. Nous donnerons ultérieurement la démonstration géométrique que tout nombre entier est une somme de quatre carrés, de trois triangulaires, etc.

Ainsi, tout nombre premier $p = 4q + 1$ est une somme de deux carrés, l'un pair, l'autre impair : dans une lettre à Pascal, Fermat demande une règle générale pour trouver les deux carrés. Il résulte, de l'étude de ses manuscrits originaux et inédits, ce théorème :

Si l'on développe en fraction continue la racine carrée d'un nombre premier $p = 4q + 1$, c'est-à-dire la somme de deux carrés, l'un pair et l'autre impair, la racine du carré impair est le dénominateur qui correspond au quotient incomplet moyen de la période dans laquelle se développe $\sqrt{p}$.

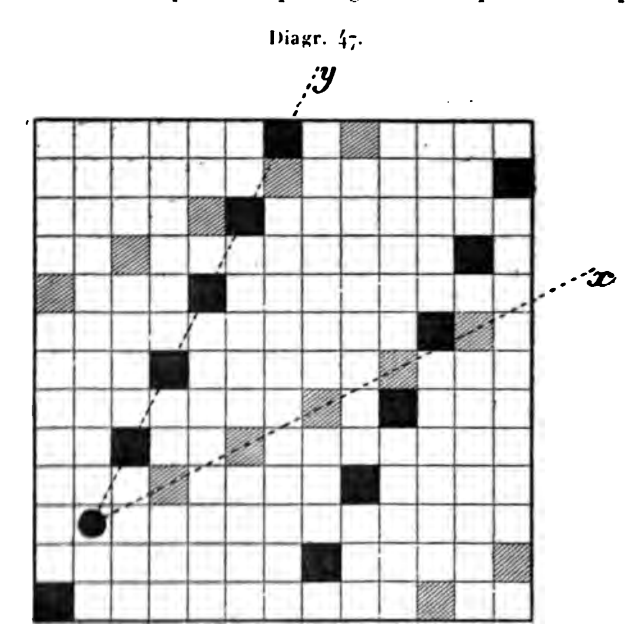
Bien que ne se servant pas de l'algorithme des fractions continues, Fermat en déduit, dans le développement de $\sqrt{p}$, pour $p = 4q + 1$ non premier, une méthode de décomposition de p en facteurs premiers, mais dans un certain nombre de cas seulement. Cependant les calculs de Fermat sont plus expéditifs et se rapprochent du procédé indien, beaucoup plus

puissant que le procédé classique, pour le développement de la racine carrée et pour la résolution de l'équation de Pell.

Le double alignement.

Considérons deux alignements de pas r et s; représentons les cases de l'un par des cases noires, et ceux de l'autre par des cases grises. Si la différence $r - s$ représente un nombre premier à p, il résulte du théorème II de l'Introduction que ces deux alignements n'auront qu'une seule case commune, que nous avons représentée par un rond noir (diagramme n° 47). En particulier, si $r - 1$ est premier à p, l'alignement de pas r est tel que deux

Diagr. 47.



cases noires de l'alignement ne sont jamais situées sur une même parallèle à la diagonale montante de gauche à droite, puisque celle-ci représente un alignement de pas égal à un. De même, si $r + 1$ est premier à p, l'alignement de pas r est tel que deux de ses cases ne sont jamais situées sur une même parallèle à la diagonale descendante de gauche à droite, puisque celle-ci représente un alignement de pas égal à

$$p - 1 \text{ ou à } - 1.$$

Le problème des reines.

Il résulte de ces considérations que l'on peut placer sur un échiquier de p^2 cases p pions en alignement de première espèce, et de telle sorte

que deux de ces pions ne se trouvent jamais sur une même ligne parallèle aux bords ou aux diagonales de l'échiquier; pour cela, il faut et il suffit que le pas r de l'alignement soit tel que les nombres

$$r,\ r-1,\ r+1$$

soient premiers à p. Par conséquent, le nombre des solutions de ce problème est égal à p multiplié par le nombre des entiers r qui vérifient les conditions précédentes. On a donc ce théorème, qui donne le nombre des solutions par alignements de première espèce du problème des reines sur l'échiquier :

Le nombre des solutions du problème des reines par alignements de première espèce sur l'échiquier de p^2 cases est égal à

$$\frac{p^2}{abc\ldots}(a-3)(b-3)(c-3)\ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ désignant les facteurs premiers différents de p.

Ainsi, les cases noires des diagrammes nos 45, 46, 47 donnent une solution du problème des reines sur les échiquiers de 11^2 et 13^2 cases; en remontant ces cases d'un, de deux, ..., de $(p-1)$ rangs, on a encore des solutions.

La Table d'addition.

A l'époque où Néper inventait le procédé pour les calculs exacts, connu sous le nom de *Rhabdologie*, et qui consiste dans la permutation des lignes

Diagr. 48.

t	at	bt	ct	dt	et
s	as	bs	cs	ds	es
r	ar	br	cr	dr	er
q	aq	bq	cq	dq	eq
p	ap	bp	cp	dp	ep
	a	b	c	d	e

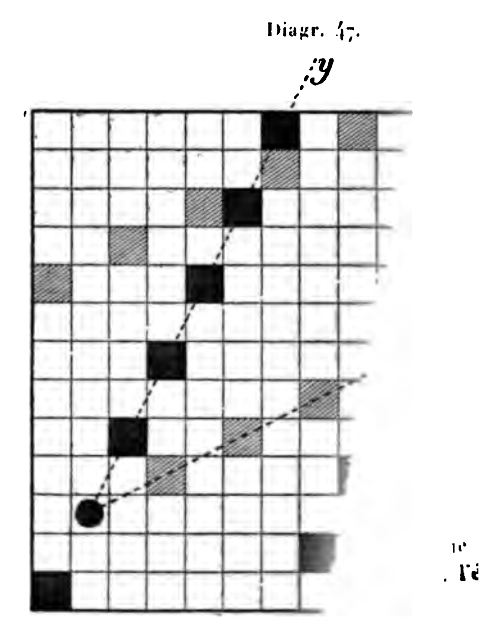
et des colonnes de la Table de multiplication de Pythagore, Fermat indiquait, mais postérieurement, l'application des propriétés de la théorie des permutations des lignes et des colonnes d'une Table d'addition à la construction des carrés magiques. Le diagramme n° 48 représente une Table d'ad-

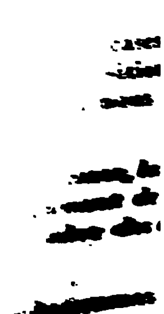
puissant que le procédé classique, pour le dévelo
carrée et pour la résolution de l'équation de Pell.

Le double alignement.

Considérons deux alignements de pas r et s; r
l'un par des cases noires, et ceux de l'autre par d
férence $r - s$ représente un nombre premier à p,
de l'Introduction que ces deux alignements n'auro
mune, que nous avons représentée par un rond n
particulier, si $r - 1$ est premier à p, l'alignemen

Diagr. 47.





le
. l'é

cases noires de l'alignement ne sont
lèle à la diagonale montante de gau
sente un alignement de pas égal à r
l'alignement de pas r est tel que d
sur une même parallèle à la diag
puisque celle-ci représente un alig


p -

Le probl

Il resulte de ces considérati
de p^2 cases p pions en alignem

que les sommes des nombres renfermés dans les cases de deux lignes ou de deux colonnes ne saurait être la même, à moins de supposer l'égalité de deux nombres de la ligne extérieure au-dessous de l'échiquier ou de la colonne extérieure à gauche, et, par suite, l'identité de deux lignes ou de deux colonnes.

Remarque. — Les n^2 premiers nombres entiers forment évidemment une Table d'addition; il suffit de les écrire successivement dans l'ordre numérique sur les cases de l'échiquier : les rangées extérieures sont fournies par les nombres

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

et

$$0, n, 2n, \ldots, n^2 - n.$$

Les carrés diaboliques.

Supposons que l'on ait déterminé pour un échiquier de n^2 cases deux alignements de pas r et s, tels que $r - s$ soit premier à n, et qu'il en soit de même de $r(r \pm 1)$ et $s(s \pm 1)$, ainsi que nous l'avons représenté, par exemple (diagramme n° 47), pour les cases grises de ox et les cases noires de oy; plaçons successivement sur les cases grises de ox les nombres ap, bp, cp, ... de la ligne inférieure d'une Table d'addition et sur les cases noires de oy les nombres ap, aq, ar, ... de la première colonne de cette Table; cela posé, supposons que par les cases noires de oy on ait mené des alignements parallèles à ox, on aura ainsi distribué les n^2 cases de l'échiquier aux sommets de parallélogrammes égaux dont les côtés sont parallèles à ox et à oy : on pourra ainsi placer les nombres renfermés dans les n^2 cases de la Table d'addition. Mais, puisque dans chaque alignement il n'y a pas deux cases sur la même ligne ou sur la même colonne, il en résulte que la somme des cases d'une même ligne ou d'une même colonne sera égale à la constante. Il en sera de même parallèlement aux diagonales, puisque $r \pm 1$ et $s \pm 1$ sont premiers à s; il en sera encore de même pour tout alignement de première espèce de pas h, tel que les nombres h, $h \pm r$, $h \pm s$ soient premiers à p.

Nous avons ainsi formé un carré diabolique, c'est-à-dire que nous avons rempli les n^2 cases d'un carré avec les n^2 premiers nombres consécutifs ou, plus généralement, avec n^2 nombres d'une Table d'addition, de telle sorte que la somme des nombres renfermés dans la même ligne, dans la même colonne ou dans la même parallèle à l'une des diagonales, soit constamment la même.

Mais une Table d'addition donne, par permutation,

$$(1.2.3\ldots n)^2$$

Tables distinctes; le nombre des valeurs de r telles que r, $r+1$ et $r-1$

soient premiers à n est, pour $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$,

$$\frac{n}{abc\ldots}(a-3)(b-3)(c-3)\ldots,$$

et le nombre des valeurs de s, telles que s, $s+1$, $s-1$, $s-r$ soient premiers à n est

$$\frac{n}{abc\ldots}(a-4)(b-4)(c-4)\ldots.$$

Par suite, *le nombre des diaboliques par alignements de première espèce a pour expression*

$$\left(1.2.3\ldots n\,\frac{n}{abc\ldots}\right)^2(a-3)(b-3)(c-3)\ldots(a-4)(b-4)(c-4)\ldots.$$

On doit diviser ce nombre par n^2 si l'on ne considère pas comme distincts les carrés diaboliques obtenus par permutations circulaires des lignes ou des colonnes, et encore par 8, si l'on ne considère pas comme distincts les carrés obtenus par la rotation et par la symétrie de l'échiquier.

Classification des diaboliques.

Lorsque le pas r de l'alignement n'est pas premier au nombre n des cases du côté de l'échiquier, ces deux nombres ont un plus grand commun diviseur d, et l'on peut poser $r = d\rho$ et $n = d\delta$, en désignant par ρ et δ des nombres entiers; dans ce cas, les n cases de l'alignement ne sont plus disposées de telle sorte que chaque ligne et chaque colonne ne renferme qu'une seule case; mais, si l'on procède par colonnes successives, les cases sont rangées sur δ lignes seulement, et ces lignes contiennent δ cases, tandis que les autres $n - \delta$ lignes n'en contiennent pas. Nous dirons alors que l'on a un alignement de l'espèce d.

En continuant à procéder par colonnes successives, le nombre total de tous les alignements est évidemment égal à n; d'ailleurs, le nombre des alignements d'espèce d est δ : on retrouve ainsi une interprétation géométrique de cette formule donnée par Gauss dans les *Disquisitiones arithmeticæ*

$$n = \varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots,$$

dans laquelle d, d', d'', ... désignent tous les diviseurs de n, en y comprenant 1 et n.

Lorsque les nombres générateurs de la Table d'addition sont quelconques, on ne peut former de carrés diaboliques par alignements autres que ceux de première espèce; mais on peut former des carrés diaboliques par alignements d'espèce d lorsque la Table d'addition formée de n^2 éléments se décompose en δ^2 Tables, telles que pour toutes ces Tables la somme des nombres générateurs des lignes extérieures d'une Table quelconque est la même, et que la somme des nombres générateurs des colonnes

extérieures est aussi la même, bien que distincte de la précédente. Dans ses remarquables Mémoires sur les *Carrés et les Cubes nasiques,* le Rév. A.-H. Frost, de l'Université de Cambridge, a montré, par exemple, comment on pouvait obtenir les diaboliques par alignements de troisième et de quatrième espèces, bien que M. le Dr Scheffer, dans un Ouvrage récent et très étudié sur les *Figures magiques,* ait annoncé l'impossibilité de la construction de ces carrés.

On reconnaît bien que la formule pour le nombre des carrés diaboliques de première espèce donne zéro, lorsque le nombre n est un multiple de 3; c'est qu'en effet il ne saurait exister alors de carrés diaboliques par alignements de première espèce; mais il est facile d'obtenir, par des procédés entièrement semblables à ceux qui précèdent, non seulement la construction des carrés diaboliques par alignements d'espèce d, mais aussi la formule qui en représente le nombre.

En résumé, bien que nous reconnaissions que la théorie des carrés magiques ne donne lieu, dans le sens le plus général, à aucune application théorique ou pratique, il n'en est pas de même de la théorie des carrés diaboliques. Celle-ci donne des figurations et des extensions de la théorie du plus grand commun diviseur, de l'indicateur, des systèmes complets de résidus pour des modules premiers et composés; elle fournit des démonstrations nouvelles et plus simples des théorèmes les plus importants de Arithmétique supérieure et de la théorie des formes quadratiques. Nous montrerons ultérieurement d'autres applications.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

11090. Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

L 46a

PLANCHES.

Classes

Nos des formes	I	II	III	Formul des typ
	Carrés simples			
57			16 1 15 2 5 8 10 11 4 13 3 14 9 12 6 7	III, I, I
58	11 5 10 8 1 12 7 14 16 13 2 3 6 4 15 9		8 2 13 11 1 15 4 14 16 10 5 3 9 7 12 6	A I B II
59	8 10 5 11 1 7 12 14 16 2 13 3 9 15 4 6		11 13 2 8 1 4 15 14 16 5 10 3 6 12 7 9	
60		12 6 3 13 1 11 14 8 16 2 7 9 5 15 10 4	10 13 3 8 1 4 14 15 16 5 11 2 7 12 6 9	D I E II
61		13 3 6 12 1 14 11 8 16 7 2 9 4 10 15 5	8 3 13 10 1 14 4 15 16 11 5 2 9 6 12 7	
62			6 3 13 12 1 14 4 15 16 7 9 2 11 10 8 5	J I K IV
63			12 13 3 6 1 4 14 15 16 9 7 2 5 8 10 11	

ÉS MAGIQUES

Pl. V.

des ...nes	Classes I	Classes II	Classes III	Formules des types
	Carrés simples			
4	6 1 16 11 7 10 3 14 9 8 13 4 12 15 2 5	10 1 16 7 5 12 13 4 11 6 3 14 8 15 2 9		C,I,B,II
5	12 1 16 5 9 8 13 4 7 10 3 14 6 15 2 11	8 1 16 9 11 6 3 14 5 12 13 4 10 15 2 7		
66			7 1 16 10 4 13 2 15 9 8 11 6 14 12 5 3	F,I,E,IV
7			14 1 16 3 9 8 11 6 4 13 2 15 7 12 5 10	
8	13 1 16 4 7 10 3 14 2 15 6 11 12 8 9 5			H,I,G,II
9	12 1 16 5 2 15 6 11 7 10 3 14 13 8 9 4			
70	11 1 16 6 2 15 4 13 7 10 5 12 14 8 9 3	7 1 16 10 2 15 4 13 11 6 9 8 14 12 5 3	14 1 16 3 5 12 7 10 4 13 2 15 11 8 9 6	L,I,K,IV

TYPES DES

Classes

Nos des formes	I	II	III	Form des ty
		Carrés simples		
57			16 1 15 2 5 8 10 11 4 13 3 14 9 12 6 7	III,I,I
58	11 5 10 8 1 12 7 14 16 13 2 3 6 4 15 9		8 2 13 11 1 15 4 14 16 10 5 3 9 7 12 6	A I B II
59	8 10 5 11 1 7 12 14 16 2 13 3 9 15 4 6		11 13 2 8 1 4 15 14 16 5 10 3 6 12 7 9	
60		12 6 3 13 1 11 14 8 16 2 7 9 5 15 10 4	10 13 3 8 1 4 14 15 16 5 11 2 7 12 6 9	D I E II
61		13 3 6 12 1 14 11 8 16 7 2 9 4 10 15 5	8 3 13 10 1 14 4 15 16 11 5 2 9 6 12 7	
62			6 3 13 12 1 14 4 15 16 7 9 2 11 10 8 5	J I K IV
63			12 13 3 6 1 4 14 15 16 9 7 2 5 8 10 11	

Classes

N°des formes	I	II	III	Formulaires des types
	Carrés semi-diaboliques			
8	1 14 7 12 4 15 6 9 16 3 10 5 13 2 11 8	1 14 11 8 4 15 10 5 16 3 6 9 13 2 7 12	1 14 4 15 7 12 6 9 16 3 13 2 10 5 11 8	I II III IV
9	1 14 7 12 11 8 13 2 16 3 10 5 6 9 4 15	1 14 11 8 7 12 13 2 16 3 6 9 10 5 4 15	1 14 4 15 11 8 10 5 16 3 13 2 6 9 7 12	I IV III II
10	1 12 7 14 6 15 4 9 16 5 10 3 11 2 13 8	1 8 11 14 10 15 4 5 16 9 6 3 7 2 13 12	1 15 4 14 6 12 7 9 16 2 13 3 11 5 10 8	I II III IV
11	1 12 7 14 13 8 11 2 16 5 10 3 4 9 6 15	1 8 11 14 13 12 7 2 16 9 6 3 4 5 10 15	1 15 4 14 10 8 11 5 16 2 13 3 7 9 6 12	[illegible] [illegible] III II
2	1 4 16 13 15 14 2 3 10 11 7 6 8 5 9 12	1 4 16 13 15 14 2 3 6 7 11 10 12 9 5 8	[illegible] 12 14 5 3 15 11 4 [illegible] 8 2 [illegible] [illegible]	[illegible]
3	1 6 16 11 15 12 2 5 10 13 7 4 8 3 9 14	1 10 16 7 15 8 2 9 6 13 11 4 12 3 5 14	[illegible] 12 [illegible] [illegible] 2 15 [illegible] 4 [illegible] 8 [illegible] [illegible] 14	[illegible]
4	1 11 16 6 8 14 9 3 10 4 7 15 13 5 2 12	1 7 16 10 12 14 5 3 6 4 11 13 15 9 2 8	1 [illegible] [illegible] [illegible] 8 14 [illegible] [illegible] 15 7 4 [illegible] 12 2 5 [illegible]	[illegible]

ÉS MAGIQUES.

Classes

Pl. I.

les nes	I				II				III				Formules des types.
	Carrés semi-diaboliques												
	1	14	7	12	1	14	11	8	1	14	4	15	I
	4	15	6	9	4	15	10	5	7	12	6	9	II
	16	3	10	5	16	3	6	9	16	3	13	2	III
	13	2	11	8	13	2	7	12	10	5	11	8	IV
	1	14	7	12	1	14	11	8	1	14	4	15	I
)	11	8	13	2	7	12	13	2	11	8	10	5	IV
	16	3	10	5	16	3	6	9	16	3	13	2	III
	6	9	4	15	10	5	4	15	6	9	7	12	II
	1	12	7	14	1	8	11	14	1	15	4	14	I
0	6	15	4	9	10	15	4	5	6	12	7	9	II
	16	5	10	3	16	9	6	3	16	2	13	3	III
	11	2	13	8	7	2	13	12	11	5	10	8	IV
	1	12	7	14	1	8	11	14	1	15	4	14	I
1	13	8	11	2	13	12	7	2	10	8	11	5	IV
	16	5	10	3	16	9	6	3	16	2	13	3	III
	4	9	6	15	4	5	10	15	7	9	6	12	II
	1	4	16	13	1	4	16	13	1	7	16	10	I, II, III, IV
2	15	14	2	3	15	14	2	3	12	14	5	3	
	10	11	7	6	6	7	11	10	13	11	4	6	
	8	5	9	12	12	9	5	8	8	2	9	15	
	1	6	16	11	1	10	16	7	1	6	16	11	I, IV, III, II
3	15	12	2	5	15	8	2	9	12	15	5	2	
	10	13	7	4	6	13	11	4	13	10	4	7	
	8	3	9	14	12	3	5	14	8	3	9	14	
	1	11	16	6	1	7	16	10	1	11	16	6	I, II, III, IV
4	8	14	9	3	12	14	5	3	8	14	9	3	
	10	4	7	13	6	4	11	13	13	7	4	10	
	15	5	2	12	15	9	2	8	12	2	5	15	

Paris, Imp. Monrocq.

TYPES DES (

Classes

Nos. des formes	Carrés simples			Formul des typ
71	14 1 16 3 7 10 5 12 2 15 4 13 11 8 9 6	14 1 16 3 11 6 9 8 2 15 4 13 7 12 5 10	11 1 16 6 4 13 2 15 5 12 7 10 14 8 9 3	
72	16 13 2 3 1 7 12 14 8 10 5 11 9 4 15 6			*B* *I* *A* *II*
73	16 2 13 3 1 7 12 14 8 10 5 11 9 15 4 6			
74		16 2 7 9 1 11 14 8 12 6 3 13 5 15 10 4		*E* *I* *D* *II*
75		16 7 2 9 1 11 14 8 12 6 3 13 5 10 15 4		
76			16 7 9 2 1 4 14 15 12 13 3 6 5 10 8 11	*K* *I* *J* *IV*
77			16 9 7 2 1 4 14 15 12 13 3 6 5 8 10 11	
78		16 1 8 9 13 6 11 4 3 12 5 14 2 15 10 7		*B,I,C*

2



TYPES DES CARRÉS DIABOLIQUES DE 5.

1

1	23	10	12	19
15	17	4	21	8
24	6	13	20	2
18	5	22	9	11
7	14	16	3	25

2

1	23	10	14	17
15	19	2	21	8
22	6	13	20	4
18	5	24	7	11
9	12	16	3	25

3

1	23	20	12	9
15	7	4	21	18
24	16	13	10	2
8	5	22	19	11
17	14	6	3	25

4

1	23	20	14	7
15	9	2	21	18
22	16	13	10	4
8	5	24	17	11
19	12	6	3	25

5

2	23	9	11	20
14	16	5	22	8
25	7	13	19	1
18	4	21	10	12
6	15	17	3	24

6

2	23	9	15	16
14	20	1	22	8
21	7	13	19	5
18	4	25	6	12
10	11	17	3	24

7

2	23	19	11	10
14	6	5	22	18
25	17	13	9	1
8	4	21	20	12
16	15	7	3	24

8

2	23	19	15	6
14	10	1	22	18
21	17	13	9	5
8	4	25	16	12
20	11	7	3	24

9

4	23	7	11	20
12	16	5	24	8
25	9	13	17	1
18	2	21	10	14
6	15	19	3	22

10

4	23	7	15	16
12	20	1	24	8
21	9	13	17	5
18	2	25	6	14
10	11	19	3	22

11

4	23	17	11	10
12	6	5	24	18
25	19	13	7	1
8	2	21	20	14
16	15	9	3	22

12

4	23	17	15	6
12	10	1	24	18
21	19	13	7	5
8	2	25	16	14
20	11	9	3	22

13

5	23	6	12	19
11	17	4	25	8
24	10	13	16	2
18	1	22	9	15
7	14	20	3	21

14

5	23	6	14	17
11	19	2	25	8
22	10	13	16	4
18	1	24	7	15
9	12	20	3	21

15

5	23	16	12	9
11	7	4	25	18
24	20	13	6	2
8	1	22	19	15
17	14	10	3	21

16

5	23	16	14	7
11	9	2	25	18
22	20	13	6	4
8	1	24	17	15
19	12	10	3	21

PROBLÈME D'EULER
AVEC LES SAUTS DE CAVALIER MODIFIÉS
Solutions du Rév. A. H. FROST

16	71	28	33	6	61	96	45	82	69
7	62	97	46	15	70	27	32	5	60
40	49	38	31	8	89	12	87	14	21
55	90	43	86	41	22	35	30	9	94
72	17	34	29	54	95	44	83	68	81
63	100	65	98	47	78	51	26	59	4
48	39	50	37	92	11	88	13	20	77
91	56	85	42	19	76	23	36	93	10
18	73	24	53	2	57	84	67	80	75
1	64	99	66	79	74	25	52	3	58

48	15	32	73	60	87	44	13	8	77
17	34	51	30	75	46	11	96	53	6
72	39	88	49	14	9	78	61	86	43
31	74	47	16	33	52	7	76	45	12
50	29	18	35	58	97	54	5	10	95
89	66	71	26	91	64	85	42	79	62
36	21	100	69	28	83	40	23	98	81
19	92	57	2	67	38	25	94	55	4
70	27	90	65	22	99	80	63	84	41
1	68	37	20	93	56	3	82	59	24

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BACHET, sieur de **MÉZIRIAC**. — **Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres.** 3ᵉ édition, revue, simplifiée et augmentée par *A. Labosne*, Professeur de Mathématiques. Petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs ; 1879.

Tirage sur papier vélin.......................... 6 fr.
Tirage sur papier vergé.......................... 8 fr.

DOSTOR (G.), Docteur ès sciences, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris. — **Éléments de la théorie des déterminants**, avec application à l'Algèbre, la Trigonométrie et la Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace. 2ᵉ édition. In-8 ; 1883... 8 fr.

LAISANT (C.-A.), Député, Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Introduction à la méthode des quaternions.** In-8, avec figures ; 1881.. 6 fr.

LUCAS (Éd.), Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. — **Récréations mathématiques.** 2 volumes petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs.

Tome I (1882) : *Les Traversées. — Les Ponts. — Les Labyrinthes. — Les Reines. — Le Solitaire. — La numération. — Le Baguenaudier. — Le Taquin.*

Tome II (1883) : *Qui perd gagne. — Les Dominos. — Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-Tête. — Les Jeux de Demoiselles. — Le Jeu icosien d'Hamilton.*

Prix : Papier vélin.............. 7 fr. 50 c.
Papier hollande........... 12 fr.

LAQUIÈRE (E.-M.), ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Géométrie de l'échiquier.** *Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier ; considérations numériques sur une série de solutions semi-régulières.* Grand in-8 ; 1880................................ 2 fr.

SERRET (J.-A.), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Cours d'Algèbre supérieure.** 5ᵉ édition. Deux forts volumes in-8 ; 1885.. 25 fr.

SERRET (J.-A.), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Cours de Calcul différentiel et intégral.** 3ᵉ édition, 2 forts volumes in-8, avec figures dans le texte ; 1886.......................... 24 fr.

TAIT (P.-G.), Professeur des Sciences physiques à l'Université d'Édimbourg. — **Traité élémentaire des Quaternions**, traduit sur la 2ᵉ édition anglaise, avec *Additions de l'Auteur et Notes du Traducteur*, par G. Plarr, Docteur ès Sciences mathématiques. Deux beaux volumes grand in-8, avec figures dans le texte, se vendant séparément.

Iʳᵉ Partie : *Théorie. Applications géométriques* ; 1882...... 7 fr. 50
IIᵉ Partie : *Géométrie des courbes et des surfaces. Cinématique. Applications à la Physique* ; 1885.................................. 7 fr. 50

11696 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

